sctm06
sociedad, ciencia, tecnología y matemáticas 2006

Crédito y matemáticas

José L. Fernández Pérez
Universidad Autónoma de Madrid y Analistas Financieros Internacionales

1. OBERTURA

Imagine, querido lector, que va usted, se dirige a su oficina bancaria, entra, se presenta ante un empleado (que cruza las manos sobre la mesa tras haberle saludado y ofrecerle asiento) y, ¡alma de Dios!, solicita un crédito. La escena podría transcurrir como sigue.

> Con amabilidad y firmeza simultáneas, el diligente empleado que le atiende le requiere que aporte unos cuantos datos personales. De usted, cliente, ya le constan muchos (otros) datos, pero bueno, unos cuantos más…
> El empleado, con aire de eficiencia, va introduciendo paulatina y meticulosamente en un formulario de su ordenador los datos que usted sumisamente le va proporcionando. Cuando ya ha terminado, valida pulsando el botón de «Aceptar datos» para, con parsimonia reverencial, cual si de un oráculo se tratara, colocar el puntero sobre el botón «Analizar».
> El empleado escenifica a continuación una corta pausa, de silencio un tanto espeso, durante la que respira hondamente y suspira veladamente, y que se rompe cuando el susodicho le mira a usted de soslayo primero y directamente a los ojos después, menea ligeramente la cabeza de arriba abajo, frunce el ceño, arquea una ceja (la izquierda, por cierto) y, por fin, y sólo entonces, hace *clic* en el ratón.

Este inocuo *clic* desencadenará una avalancha de procesos matemáticos y estadísticos: transformadas de Fourier, análisis discriminante de datos, simulación Montecarlo, y otros que, si el tiempo no lo impide y la autoridad lo permite, pienso describir en esta charla.

2. SCORING Y RATING

Hace unos meses me encontraba haciendo cola pacientemente en una ventanilla de una oficina del BBVA. La espera (y mi natural alparcero) desvió mi atención hacia uno de esos cubículos donde se atienden sentados trámites de mayor dignidad, calado y entidad que los que habitualmente se ventilan en las ventanillas. Y pasó lo que sigue.

> Sumiso cliente sentado a la mesa de atenta empleada que sin pestañear, absorta en la pantalla, teclea con intenso denuedo.

> Tramitación. Pausa larga. Concentración ante la pantalla oráculo.
> —Nada, no hay nada que hacer.
> —¿¡…!?
> —No me da el scoring, y sin scoring…, usted comprenderá, no hay nada que hacer.
> La empleada se levanta de su asiento, da unos cortos pasos alejándose, se detiene y se vuelve con un gesto mitad solidario, mitad demandante de resignación.
> Al paisano se le caen los hombros y eleva ligeramente los ojos para que la vista se le pierda en el ajetreo de la calle. No comprende nada.

Scoring, en este contexto, viene de «puntuación». Usamos la palabra inglesa (en realidad, decimos… *escorin*, claro). En singular, pase, pero el plural suena un punto escatológico: escórines o escorines. Imaginen, si les place, a un circunspecto y adusto, como corresponde al puesto, consejero delegado de una entidad financiera, aduciendo ante la junta general de accionistas que *«los escorines de nuestros acreditados se comparan favorablemente con los de nuestros competidores»*.

Se trata de *clasificar* individuos, candidatos a ser acreditados[1], por su *calidad crediticia*, es decir, por su solvencia, por su capacidad de afrontar los pagos a los que se comprometerían al recibir un crédito. Las garantías que se aportan (personal, hipotecaria) entran después, aunque el propio scoring está afectado por esas garantías. A cada cliente, o potencial cliente, se le ha de asignar una probabilidad de que incumpla en sus pagos. Esa probabilidad se denota por PD (*probability of default*). La PD de un individuo concreto es la probabilidad de que ese individuo en un año típico, o si se prefiere en un año promedio, deje de cumplir sus obligaciones como acreditado, es decir, se retrase en el pago de cuotas o, simple y llanamente, deje de pagarlas.

Es un *a priori*. Probabilidad, no frecuencia. La *tasa de morosidad* (que publica el Banco de España) recoge el porcentaje de préstamos incumplidos vigentes (en saldo). La tasa de morosidad en el momento de la charla (octubre de 2006) estaba en mínimos absolutos, del orden de 0.7% (¡hum!), pero en estos últimos seis meses ha estado creciendo paulatinamente.[2]

A cada potencial acreditado (y a cada cliente) se le asigna una probabilidad de incumplimiento. De verdad, así es. El scoring es, de hecho, el procedimiento científico, estadístico, que permite esa asignación.

La primera pregunta es, como no podía ser menos, ¿por qué?, sí, ¿por qué tenemos scoring? ¿Por qué no basta con el criterio más o menos subjetivo fundamentado en la experiencia del director de la oficina? Al fin y al cabo, el director de la oficina maneja datos objetivos del cliente (nómina, otros préstamos, listado de morosos, etc.) y quiere tener tasas bajas de morosidad entre su clientela.

En primer lugar, los clientes son muchos en número y de movilidad elevada, y su conocimiento, por muy integrada en su entorno que esté la oficina, no es es suficiente. El scoring implica un procedimiento escrupuloso de recogida de datos, lo que supone rigor. Tanta objetividad y rigor puede verse como fría e injusta. Lo es. Y evita sesgos naturales subjetivos por parte de quienes conceden los créditos. No se olvide que la oficina o los servicios centrales no sólo quieren morosidad baja sino que también ansían además volumen de negocio creciente.

Estos métodos científicos acercan el proceso de concesión de créditos, de tarificación y de medición de riesgos y de determinación de capital, al que llevan a cabo desde hace siglos (¡*sic*!) las compañías de seguros con éxito patente. El que las entidades

[1] A recibir un crédito.
[2] ¡Y lo que te rondaré, morena!

de crédito hayan adoptado todos estos procesos de scoring es consecuencia de una nueva regulación bancaria global[3] que busca transparencia y homogeneidad en todo el sistema bancario mundial y que se conoce como *Nuevo Acuerdo de Capital de Basilea*.

2.1. ¿QUÉ ES UN INDIVIDUO?

Hemos dicho que hay que asignar probabilidad de incumplimiento a cada individuo. Pero, ¿qué es un individuo? La respuesta es «unas circunstancias orteguianas», aunque aquí no hay nada de *yoes*.

> —¿Qué creo que somos?
> —Un conjunto de circunstancias y funciones siempre cambiantes a las que llamamos «yo». Hacemos como si fuera invariable, pero varía continuamente hasta que se suspende. Pero seguimos llamándolo «yo». De hecho, es una especie de profesión del cuerpo.
>
> *La historia siguiente.* Cees NOOTEBOOM.

Pero bueno, vayamos al grano. Un *individuo es… una matriz de datos*, valores numéricos de atributos, que recogen el estado actual y la historia de su situación financiera y socioeconómica. Ésa es la verdad y no otra. Por fin, como no podía ser menos en la era digital y virtual en que vivimos, un individuo, a todos los efectos de lo que sigue, es un matriz de números.

DNI=...	hoy	mes-1	mes-2	mes-3	mes-4	mes-5	mes-6	mes-7	mes-....
saldo en cuenta									
cuotas									
nómina ingresada									
movimientos									
edad									
nivel academico									
estado civil									
...									

Una matriz como esta que recoge, para un DNI, un código de identificación, los valores de una serie de atributos en, por ejemplo, todos los meses pasados.

2.2. IDEA DE SCORING

Para tener una idea de cómo se crea y mantiene un scoring supongamos que sólo consideramos dos atributos: edad y saldo, por ejemplo. Así que tenemos dos dimensiones. Hemos preparado una base de datos: para cada fecha pasada y para cada DNI de nuestra base de datos de información, disponemos de un vector (3-dimensional en este caso):

Edad	Saldo	¿Incumplió durante el año siguiente?

donde incumplir o no se registra con un 1 o un 0, por ejemplo. Representemos estos datos en un plano: cada punto es un individuo en una fecha. Los individuos con • no fallaron en el siguiente año. Los individuos con △ incumplieron. Hay mucha redundancia, cierto,

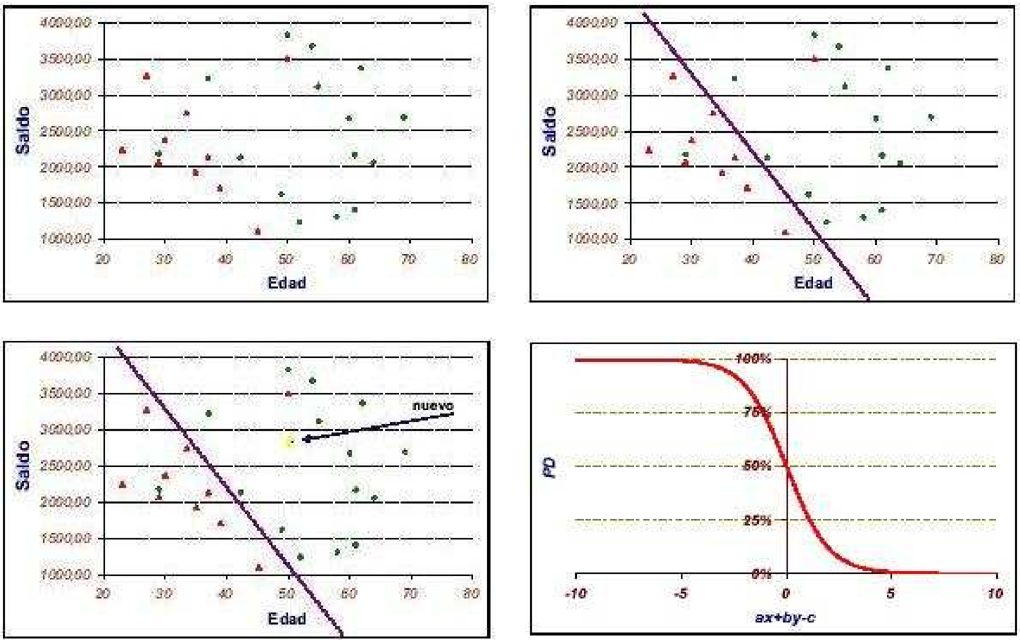
[3] Globalización, ¡ahhhhh!

en estos datos, pero obviémoslo. El color rojo y azul es una tercera dimensión[4]. Entra en acción el *análisis discriminante*. Buscamos separar por una recta los azules de los rojos:

a un lado los justos, al otro los pecadores…

Buscamos la recta que mejor separe (con una *distancia* adecuada) los • de los △. La recta de discriminación no separa perfectamente, clasifica como buenos algunos malos y como malos algunos buenos. Inevitable.

Ahora tenemos que considerar un *nuevo préstamo*. Miramos sus datos. Y lo ubicamos en la representación general: si queda lejos de la recta en el lado de los •, es razonable considerarlo como potencialmente bueno, y si queda en el lado de los △, lo razonable es pensar que su probabilidad de incumplimiento sea alta.



La *distancia a la recta* se transforma en una *probabilidad de default*. Pongamos que la recta discriminante es

$$ax + by = c\,.$$

Si la cantidad $(ax + by - c)$ es positiva, bueno, si es negativa, malo. Cuantitativamente:

$$PD(x, y) = e^{-(ax+by)} K e^{-(ax+by)} K + 1\,.$$

[4] El incumplimiento es otra dimensión. ¡Vaya por Dios!

Éste es el scoring. Hay toda una teoría estadística justificativa de estas y otras elecciones de la función que transforma $ax + by$ en $PD(x, y)$. Usamos rectas (o hiperplanos) por su sencillez, pero podemos usar otros cortes. También se usan redes neuronales (pero cuidado con aprenderse la historia y no aprender de la historia), árboles de clasificación, núcleos, *support vector machines*, etc.

2.3. ¿CONCESIÓN?

Un primer uso del scoring es como herramienta para la concesión. El esquema es engañosamente sencillo: si la PD que se ha estimado en el proceso de scoring es muy baja el sistema será favorable a la concesión, módulo montante y/o garantías. Si la PD es por el contrario muy alta, casi automáticamente no se concede. Finalmente, si la PD es intermedia, ni muy alta ni muy baja, entonces hace falta más información cualitativa, un análisis más detallado.

2.4. SISTEMA DE SCORING

Un sistema de scoring en una entidad de crédito requiere, para empezar, una certificación de calidad por parte del supervisor, es decir, el Banco de España, y luego mantenimiento constante de bases de datos en condiciones, actualización periódica de parámetros, refinamiento progresivo por segmentos, incorporación de nueva información y, por supuesto, y sistemáticamente, un contraste permanente de la calidad del modelo de scoring o, en otros términos, de su verdadera capacidad predictiva.

2.5. RATING

El rating, más conocido como *reitin*, es algo así como el scoring pero para empresas, no para individuos. Esto del rating comenzó hace más de cien años con la clasificación de deuda de ferrocarriles norteamericanos, en aquellos tiempos en los que los Estados Unidos se expandían hacia su Oeste. Muchas líneas nuevas de ferrocarriles precisaban financiación, emitían deuda, y la agencia Poor se dedicaba a informar, de manera independiente, a los potenciales inversores de la calidad de solvencia de los emisores.

Rating	PD
AAA	0.01%
AA	0.04%
A	0.15%
BBB	0.57%
BB	2.21%
B	8.54%
CCC	32.94%

Hoy en día hay unas cuantas compañías, las agencias de ratings, que venden análisis de compañías para determinar su calidad crediticia, su nivel de solvencia, considerando información de su nivel de endeudamiento, de sus planes de negocio, de proyecciones, etc. Tres agencias dominan el mercado de este servicio: Standard&Poor's, Moody's y Fitch. Las agencias de rating ponen nota, como si de examen escolar se tratara, usando el sistema de letras (A, B, C, D) de los colegios americanos. Se usan los 7 juegos de letras de la izquierda de la tabla anterior, con AAA, que se lee triple A, como mejor rating y CCC como peor, cualificados con un $+$ o un $-$, especificando si la opinión (*outlook*) es positiva o negativa, e indicando si se refiere a solvencia a largo plazo o a corto plazo.

Tras larga historia acumulando datos, se tienen estadísticas que permiten asignar una probabilidad de incumplimiento en función del rating, como aparece en la tabla. Se trata de probabilidades a 1 año vista. Las estadísticas tienen sentido si suponemos que los criterios de asignación de rating son estables en el tiempo. Supongámoslo.

La deuda de España, del Reino de España, tiene el mejor rating posible AAA por las tres agencias. Nuestros (¿?) bancos y cajas oscilan entre AA y A, mientras que Telefónica o Endesa tienen en marzo de 2007 un rating $BBB+$.

3. JUSTOS POR PECADORES

¡Atención, noticia!, los préstamos se devuelven con interés. El dinero se alquila. En España el sistema más habitual es que los intereses sean variables y se fijen con Euribor a 1 año más un diferencial. ¿Y ese diferencial? La idea es que cuanta más PD, más diferencial, ¿no?

Vincular el diferencial a la probabilidad de incumplimiento es análogo al enfoque de las compañías de seguros en las que las primas en las pólizas dependen de la potencial siniestralidad. ¿Estamos equiparando así morosidad a siniestralidad?

Pero, ¿es esto un subsidio cruzado?, ¿están pagando justos por pecadores?

3.1. LA LEY DE LOS GRANDES NÚMEROS

> Incluso el más estúpido de los hombres, por medio de algún instinto natural, por sí mismos y sin ninguna instrucción (lo que no deja de ser asombroso), está convencido de que cuantas más observaciones se hayan efectuado, menor es el peligro de desviarnos de nuestra meta.
>
> *Ars Conjectandi. Usum & Applicationem Praecedentis Doctrinae in Civilibus, Moralibus & Oeconomicis.* Jacob BERNOULLI (1654-1705), *alias* «El políticamente correcto».

En prosa vernácula: cuanto mayor es la muestra, mayor es la probabilidad de que la media de la muestra esté próxima a la media de la población.

Planteamiento. El planteamiento, en una versión simplificada, es el siguiente. Supongamos que la rentabilidad exigida es $R\%$ (esto es un dato) y que el tipo de interés es $x\%$ (esto es una incógnita). Tenemos 1.000 préstamos de 10.000 euros a 1 año, en los que la probabilidad de incumplimiento es $PD = 5\%$.

La ley de los grandes números (más la *firme convicción* de que nuestro scoring es magnífico) nos dice que

950	devuelven	10.000 $(1+x\%)$
50	devuelven	0

Estamos suponiendo la situación extrema[5] de que en caso de incumplimiento no se *recupera* nada.

Nudo. Vayamos a las cuentas. Queremos (quieren, ¡oiga!) que

$$\overset{\text{flujo real}}{950\times 10.000\,(1+x\%)} = \overset{\text{flujo esperado}}{1.000\times 10.000\,(1+R\%)}.$$

Es decir, que

$$950\overset{\text{justos}}{(x\% - R\%)} = \overset{\text{pecadores}}{50(1+R\%)}.$$

Desenlace. Completamos las cuentas y resolvemos la ecuación. Lo que cada uno de los 950 justos paga extra, $10.000(x\% - R\%)$, compensa lo que cada uno de los 50 pecadores deja de pagar: $10.000(1+R\%)$. Así que

$$\text{diferencial} = (x\% - R\%) = PD1 - PD\times(1+R\%).$$

Coda. Por supuesto, nosotros todos somos justos, sólo *los otros* son potenciales pecadores. ¡Faltaría más!

3.2. ENTRA RIESGO

> Por supuesto, hay que preguntarse si tras incrementar el número de observaciones la probabilidad de obtener la media verdadera excede finalmente cualquier nivel de certidumbre; o si el problema tiene, digamos, su propia asíntota –es decir, si hay un cierto nivel de certeza que no se puede sobrepasar–.
>
> El mismo BERNOULLI, en el mismo texto, pero un poco más abajo.

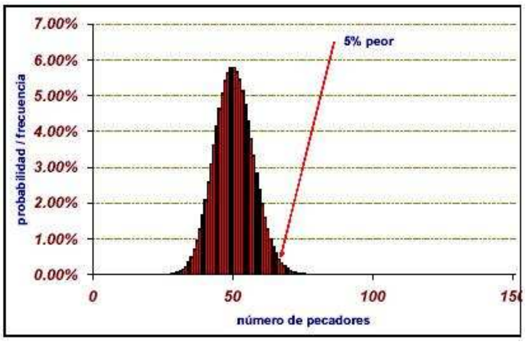
En otras palabras, la ley de los grandes números es asintótica, y, por consiguiente, el cálculo anterior conlleva riesgo.

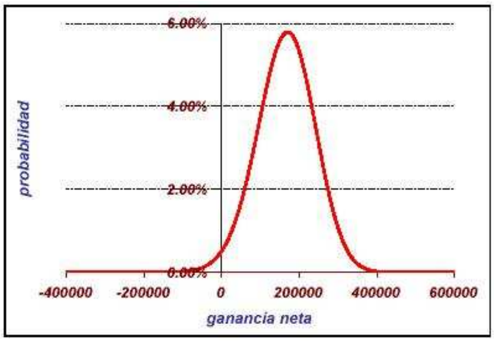
$$\text{Pecadores} = \text{distribución Binomial}\begin{cases} 1000 \text{ repeticiones} \\ \text{probabilidad de éxito } PD \end{cases}$$

$$\text{Justos} = 1000 - \text{Pecadores}$$

$$\text{Resultado} = \text{Justos}\cdot(1+x\%)$$

[5] ¡Que te crees tú eso! Firmado: *El cobrador del frac.*





Queremos (quieren, ¡oiga!, de nuevo) fijar $x\%$ para que

$$\mathbf{P}(\text{Resultado} > 1000(1 + R\%)) = 99\,\%\,,$$

que tras álgebra se traduce en:

$$\mathbf{P}\left(\underbrace{\frac{\text{Binomial}\,(1000, PD)}{1000}}_{\substack{\Uparrow \\ \text{Normal, Poisson}}} < \frac{x\% - R\%}{1 + x\%}) \right) = 99\,\%\,,$$

ecuación que determina $x\%$:

$$x\% = R\% + (1 + x\%) \cdot \text{percentil}\,.$$

4. ENTREACTO: EL EURIBOR

ID =		7		6		28		145
TICKER =		EUR003M Index		EUR006M Index		EUR012M Index		EUDR1 Curncy
DESCRIPCIÓN =		EURIBOR3M		EURIBOR6M		EURIBOR12M		EURIBOR9M
	07/01/2000	3,322	07/01/2000	3,546	07/01/2000	3,941	07/01/2000	3,735
	14/01/2000	3,321	14/01/2000	3,539	14/01/2000	3,932	14/01/2000	3,65
	21/01/2000	3,31	21/01/2000	3,527	21/01/2000	3,921	21/01/2000	3,675
	28/01/2000	3,486	28/01/2000	3,68	28/01/2000	4,062	28/01/2000	3,82
	04/02/2000	3,493	04/02/2000	3,691	04/02/2000	4,049	04/02/2000	3,805
	11/02/2000	3,491	11/02/2000	3,694	11/02/2000	4,083	11/02/2000	3,84
	18/02/2000	3,531	18/02/2000	3,746	18/02/2000	4,157	18/02/2000	3,98
	25/02/2000	3,598	25/02/2000	3,777	25/02/2000	4,113	25/02/2000	3,895
	03/03/2000	3,632	03/03/2000	3,833	03/03/2000	4,196	03/03/2000	3,99
	10/03/2000	3,736	10/03/2000	3,925	10/03/2000	4,261	10/03/2000	4,09
	17/03/2000	3,771	17/03/2000	3,969	17/03/2000	4,287	17/03/2000	4,06
	24/03/2000	3,772	24/03/2000	3,95	24/03/2000	4,262	24/03/2000	4,095
	31/03/2000	3,831	31/03/2000	4,001	31/03/2000	4,303	31/03/2000	4,1
	07/04/2000	3,861	07/04/2000	4,018	07/04/2000	4,295	07/04/2000	4,175
	14/04/2000	3,92	14/04/2000	4,065	14/04/2000	4,342	14/04/2000	4,215
	21/04/2000	3,963	21/04/2000	4,121	21/04/2000	4,391	21/04/2000	3,985
	28/04/2000	4,094	28/04/2000	4,262	28/04/2000	4,565	28/04/2000	4,3763
	05/05/2000	4,323	05/05/2000	4,49	05/05/2000	4,783	05/05/2000	4,57
	12/05/2000	4,328	12/05/2000	4,517	12/05/2000	4,839	12/05/2000	4,64
	19/05/2000	4,461	19/05/2000	4,653	19/05/2000	4,975	19/05/2000	4,82
	26/05/2000	4,401	26/05/2000	4,587	26/05/2000	4,897	26/05/2000	4,665

EURIBORES

EURIBOR A 1 AÑO DESDE 1 DE ENERO DE 2000

Los Euribores (3M, 6M, 9M, 1A) son los tipos de interés que continuamente fijan los bancos (grandes) para hacerse préstamos en Euros entre ellos. Simplificando: las cajas, los bancos toman de (se financian) y prestan a sus iguales a Euribor más diferenciales (pequeños, en comparación). En un depósito (rodante) trimestral, por ejemplo, en cada trimestre se fija el tipo a 3 meses al comienzo del trimestre (según mercado)[6] y se paga al final del trimestre.

¡Atención, pregunta!: si una Caja se compromete a pagar a alguien $\mathsf{Eur1A} \times 100$ cada año hasta dentro de 10 años, y además a pagarle 100 dentro de 10 años, ¿cuánto necesita para ser capaz de generar esos pagos?

Los pagos que tiene que hacer son variables, aleatorios, estocásticos, caóticos, desconocidos[7]…, afectados por petróleo, vivienda, Bush, Rato y otras variables de entorno. Sin embargo, le bastan exactamente 100, ni más ni menos. ¿Por qué?

4.1. PRINCIPILLO DE INCERTIDUMBRE

Caben dos posibilidades:

Pagos aleatorios y valor seguro: la cadena de flujos (aleatorios) $\mathsf{Eur1A} \times 100$ hasta dentro de 10 años y un pago de 100 dentro de 10 años, valen siempre 100 con certeza.

Pagos seguros y valor aleatorio: la cadena de flujos (fijos y ciertos) de, digamos, $6\% \times 100$ hasta dentro de 10 años y pago de 100 dentro de 10 años cuyo valor es incierto y va cambiando según pasa el tiempo.

¡Usted, sí, usted!, ¿qué prefiere? Si usted toma prestado y quiere programar sus finanzas[8], a usted lo que realmente le importa es el pago que tiene que hacer cada mes, y no tanto el valor de lo que queda por amortizar, salvo que anticipe ingresos extra para amortizar anticipadamente. Pero desde el punto de vista de una entidad de crédito (Yo, Caja[9]), el enfoque es:

1. pido (en el mercado interbancario) 10 millones de euros que devuelvo a razón de $\mathsf{Eur1A}$ más diferencial (pequeño);

[6] Como dicen en los menús más pescateros.
[7] Elíjase una opción.
[8] Un suponer.
[9] Un suponer, de nuevo.

2. presto esos 10 millones de euros a Eur1A más DIFERENCIAL (que tiene en cuenta el diferencial que pago en mercado, el diferencial por riesgo de crédito (PD) y otros);

3. cada año:

recibo	$+10$ mill. $\times$ (Eur1A + DIFERENCIAL)
pago	$+10$ mill. $\times$ (Eur1A + diferencial)
total	$+10$ mill. $\times$ (DIFERENCIAL-diferencial)

La entidad prefiere el primer enfoque, el de Eur1A más diferencial.

5. GESTIÓN DEL RIESGO

Fully imagined cultural futures were the luxury of another day, one in which «now» was of some greater duration. For us, of course, things can change so abruptly, so violently, so profoundly, that futures like our grandparents have insufficient «now» to stand on. We have no future because our present is too volatile…We have only risk management. THE SPINNING OF THE GIVEN MOMENTS SCENARIOS. Pattern recognition.

Pattern recognition. William GIBSON.

¡Vale!, usted acepta *tipo variable* Eur1A+diferencial como animal de compañía.[10] ¡Qué remedio!, si no, no juegan.

Usted tiene salario estable (su salario no está indexado a Euribor, ¿verdad?), etc., y corre un riesgo: si Eur1A sube de 3% a 6%, usted pagará el doble cada vez, así que si al 3% la hipoteca consumía una porción relevante de sus ingresos, el doble…

Hay seguros que cubren ese riesgo. No son seguros en el sentido de las pólizas de compañías de seguros (en que la ley de grandes números diversifica el riesgo), son contratos financieros. A usted, la naturaleza del contrato/seguro[11] le da igual; paga una prima inicial o periódica y le cubren un riesgo. Un *cap*[12] con *strike*[13] de 5%, pongamos por caso, es un contrato que le paga a su tenedor cada año:

$$\begin{cases} \text{la diferencia } \left(\text{Eur1A} - 5\%\right) \times \text{Nominal, si Eur1A} > 5\%; \\ 0\text{, en caso contrario.} \end{cases}$$

Si usted se ha comprometido a pagar Eur1A sobre un nominal y además tiene un cap con strike de 5%, entonces, a todos los efectos, nunca paga más de un 5% de interés. Así que al final el tipo de interés de su hipoteca se compone de:

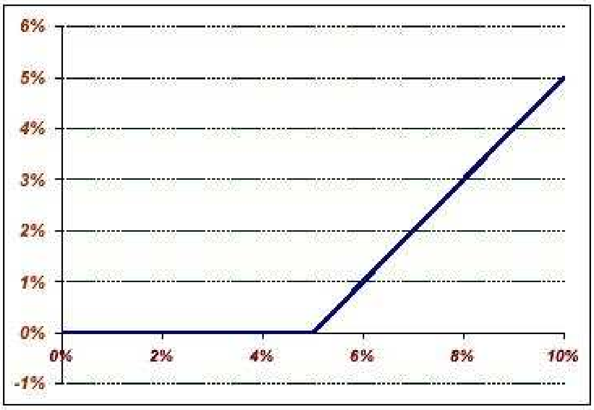
$$\min(\text{Eur1A}, 5\%) + \text{rentabilidad exigida} + \text{diferencial por } PD$$

---

[10] Matrimonio, de hecho, para toda la vida.
[11] Galgos o podencos.
[12] ¿Gorra?
[13] Precio de ejercicio.

+ periodificación de la prima del cap a 5%

Por supuesto, se puede comprar un cap sin tener el préstamo. De hecho es necesario que haya un mercado de caps (y de floors), de *especuladores de caps*, para que usted pueda comprar uno (o que su caja se lo venda o se lo incorpore como parte integral de su hipoteca). Quien compra un cap especulativamente espera (vaticina) que los tipos de interés suban.



Pero, ¿cuánto vale un cap? Atención, llamen al matemático. Acto reflejo. Si nuestros conocimientos son reclamados cada vez que hay que revisar la cuenta del restaurante, cómo no nos van llamar para calcular el valor de un cap. El perfil de pagos de un cap se recoge en el gráfico. ¡Ah!, es un perfil *no lineal*, su segunda derivada es una delta de Dirac. La complicación es grande: para poder replicar estos pagos hace falta una estrategia dinámica de inversión estructurada sobre un modelo estocástico de la evolución de la curva de tipos.[14] Un estándar de modelo de esta naturaleza es el *Libor Market Model* o Brace-Gatarek-Musiela/Jamshidiam, que en glorioso esplendor se escribe:

$$dL_i = \frac{1+\delta_i L_i}{\delta_i}\Big(\big(\beta_i(t)-\beta_{i+1}(t)\big)\cdot\big(\beta_{i(t)}(t)-\beta_{i+1}(t)\big)dt + \big(\beta_i(t)-\beta_{i+1}(t)\big)\cdot dW^{\mathbb{Q}_{Spot}}(t)\Big) =$$
$$= \sum_{j=i(t)}^{i} \frac{\delta_j s_j(t)\cdot s_i(t)}{1+\delta_j L_j(t)}dt + s_i(t)\cdot dW^{\mathbb{Q}_{Spot}}(t).$$

La i denota distintos tipos de interés, y la t denota tiempo. Las $s_i(t)$ son las volatilidades de los distintos tipos involucrados. La notación $W^{\mathbb{Q}_{Spot}}(t)$ designa el movimiento browniano en tiempo t.

Un caplet (cada uno de los pagos del cap) se valora entonces así con la *fórmula de Black*, que reza[15]

$$C_n^{Black}(\sigma) = M\delta_n B_{n+1}(0)\big(L_n(0)N(d_1) - KN(d_2)\big),$$

[14] Una larga frase que casi deja sin aliento.

[15] ¡Que Dios nos coja confesados!

$$d_1 = \frac{\log\left(\dfrac{L_n(0)}{K}\right) + \dfrac{1}{2}\sigma^2 T_n}{\sigma\sqrt{T_n}},$$

$$d_2 = \frac{\log\left(\dfrac{L_n(0)}{K}\right) - \dfrac{1}{2}\sigma^2 T_n}{\sigma\sqrt{T_n}} = d_1 - \sigma\sqrt{T_n}\ .$$

Las fórmulas anteriores no pretenden instruir, quizás epatar (un pelín) y, al menos, ilustrar sobre complejidad. El precio de un cap (con algún ingrediente adicional) en condiciones de mercado requiere complejos cálculos y/o simulaciones (software matemático). La entidad de crédito lo compra sobre una masa grande y lo vende al *detall* a particulares. Un cap (genérico) es inestable, difícil de gestionar.

Das Kapital.

Kritik der politischen Oekonomie.

Von

Karl Marx.

Erster Band.

Buch I: Der Produktionsprocess des Kapitals.

Hamburg

Verlag von Otto Meissner.

1867.

6. DAS KAPITAL

Su scoring está aprobado y certificado.[16] Internamente, ya usa el scoring como apoyo a la concesión de préstamos y su valoración. Pero, ¡recuerde!, su magnífico scoring estima *probabilidades de incumplimiento para un año promedio*. El scoring se estimó con una serie larga de datos y fechas sin tener en cuenta las diferentes condiciones macroeconómicas que regían en cada año. ¿Y si hay un año malo? Más concretamente, ¿y si el año próximo es malo? En un año malo, uno esperaría que las PD efectivas para ese año sean peores que las de la media, haciendo que se produzca un incremento substancial sobre nuestra estimación media de fallidos.

Dada una situación de la economía, los eventos de incumplimiento son independientes, pero como somos más propensos a incumplir si la economía va mal, nuestros potenciales incumplimientos son incondicionalmente dependientes.

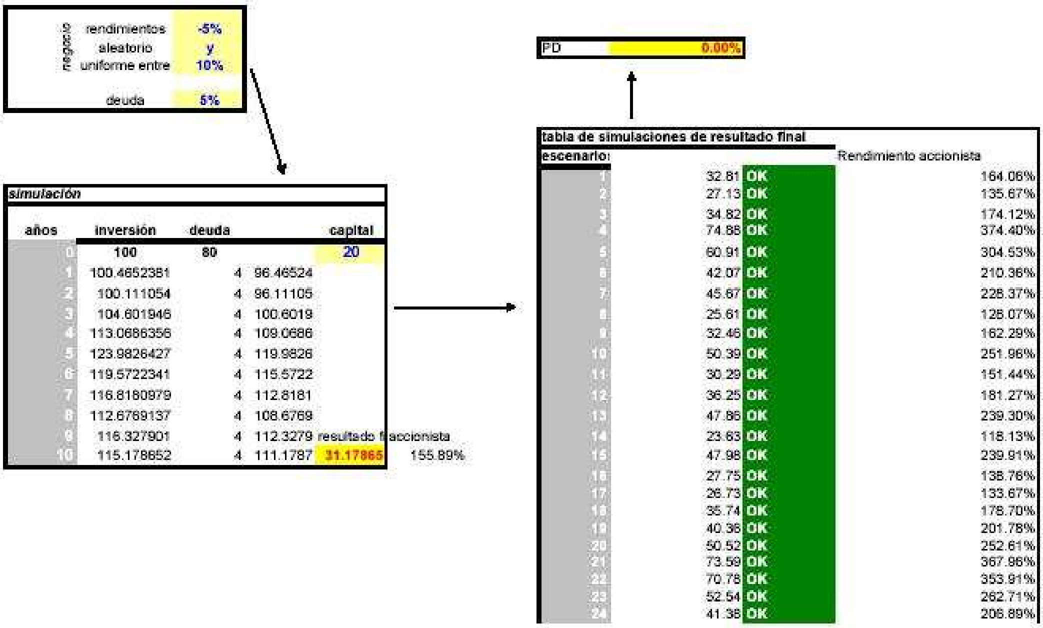
Hace falta *Kapital*. En perspectiva de vuelo rasante[17],

[16] Observe el lector desapasionado que ahora su papel es el de la entidad de crédito.

[17] ¿No hablamos de riesgos?

1. pide 100 a tipo $R\%$;
2. para un negocio que tendrá una rentabilidad $S\%$;
3. pero $S\%$ es aleatorio;
4. se necesita capital para cubrir los eventos en los que $S\%$ quede por debajo de $R\%$.

Aunque en media $\mathbf{E}(S\%)$ (rentabilidad esperada del negocio) quede muy por encima de $R\%$, lo importante es que sea poco probable que quede por debajo. Cuanto más arriesgado, es decir, cuanto más incierta o volátil sea la rentabilidad del negocio, más capital se requiere. El banco/la caja está en el negocio de prestar. Su riesgo no está en que pueda haber fallidos, esto ya se ha cobrado en los diferenciales, sino en que haya un número excesivo.



negocio		
	rendimientos	-5%
	aleatorio	y
	uniforme entre	10%
	deuda	5%

simulación				
años	inversión	deuda		capital
0	100	80		20
1	100.4652381	4	96.46524	
2	100.111054	4	96.11105	
3	104.601946	4	100.6019	
4	113.0686356	4	109.0686	
5	123.9826427	4	119.9826	
6	119.5722341	4	115.5722	
7	116.8180979	4	112.8181	
8	112.6769137	4	108.6769	
9	116.327901	4	112.3279	resultado accionista
10	115.178652	4	111.1787	31.17865 155.89%

PD	0.00%

tabla de simulaciones de resultado final			
escenario:			Rendimiento accionista
1	32.81	OK	164.06%
2	27.13	OK	135.67%
3	34.82	OK	174.12%
4	74.88	OK	374.40%
5	60.91	OK	304.53%
6	42.07	OK	210.36%
7	45.67	OK	228.37%
8	25.61	OK	128.07%
9	32.46	OK	162.29%
10	50.39	OK	251.96%
11	30.29	OK	151.44%
12	36.25	OK	181.27%
13	47.86	OK	239.30%
14	23.63	OK	118.13%
15	47.98	OK	239.91%
16	27.75	OK	138.76%
17	26.73	OK	133.67%
18	35.74	OK	178.70%
19	40.36	OK	201.78%
20	50.52	OK	252.61%
21	73.59	OK	367.96%
22	70.78	OK	353.91%
23	52.54	OK	262.71%
24	41.38	OK	206.89%

6.1. MODELO PARA CÁLCULO DE CAPITAL

Como parte del *Nuevo Acuerdo de Capital de Basilea*, y desarrollado[18] por la *Federal Reserve of the USA*[19], tenemos un modelo de cálculo de capital. El ingrediente matemático esencial de esa metodología es la relación entre *cópulas e hipotecas*.[20]

Vamos a describir la *cópula normal*[21] de eventos de incumplimiento. Se registran los posibles eventos de incumplimiento *a través* de variables normales estándar:

$$X_i = \sqrt{\rho}Y + \sqrt{1-\rho}Z_i$$

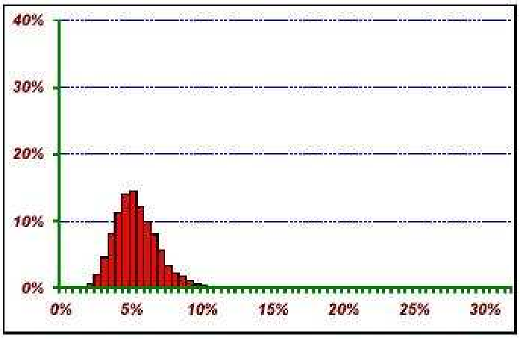
[18] Fundamentado en resultados de Gordy, Merton, Vasicek.
[19] ¿No les dije que era una regulación global?
[20] ¡Lo que faltaba! O alternativamente, ¡por fin, esto se pone interesante!
[21] ¿Cómo serán las otras? Fascinantes.

- Las X_i, las Z_i y la Y son normales estándar.
- Y registra el estado de la economía. Variable virtual. Factor común.
- Las Z_i son idiosincráticas de los individuos.
- Las X_i registran el estado de la economía (de su propensión a default) de los individuos.
- Sensibilidad común a ese estado de la economía: $\sqrt{\rho}$. O, si se prefiere, correlación entre las variables de estado de los individuos: ρ.

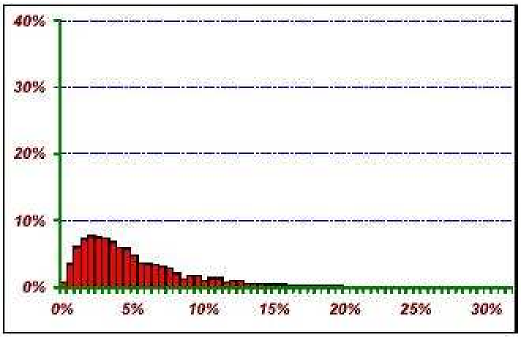
Ahora pasamos de estado de la economía a incumplimiento. El diccionario es

$$\begin{cases} \text{si } X_i < \text{umbral, incumplirá;} \\ \text{si } X_i \geq \text{umbral, no incumplirá,} \end{cases}$$

donde el umbral viene dado por $\mathbf{P}(X_i < \text{umbral}) = PD$. Si Y es positivo, habrá pocos incumplimientos, y si Y es negativo, muchos. Todo en términos relativos, porque promediando en Y tenemos PD incumplimientos.



con $PD = 5\%, \rho = 2\%$



con $PD = 5\%, \rho = 15\%$

El capital, si se quiere una buena calidad crediticia, un buen rating, es el montante necesario para cubrir hasta un porcentaje (cuanto más alto, mejor rating) de pérdidas potenciales.

La autoridad reguladora/supervisora fija unos niveles (de su propia estimación) de ρ y exige que se tenga suficiente capital para afrontar la oscilación de la tasa de morosidad hasta el percentil del 99,9%, para así garantizar la solvencia del sistema.

6.2. CAPITAL ECONÓMICO

Supongamos que hemos desarrollado internamente (dentro de la entidad de crédito) un modelo que nos permite determinar el impacto que las variaciones de las variables macroeconómicas tienen sobre las distintas *PD* (promedio sobre posibles estados de la economía). De esa manera tenemos no sólo *PD* como *PD* para el año típico, sino *PD* para el próximo año.

Nuestra estimación de capital ahora va a ser más fina, y va a estar vinculada al estado de la economía. Como parte de este proceso de refinamiento tendremos la cartera total dividida en sub-carteras más o menos homogéneas. Habiendo fijado las distintas variables que determinan el estado de la economía (tipos de interés, desempleo, precio vivienda, etc.) tendremos para cada bloque una cierta distribución de pérdidas L_i:

$$L_i = \text{Pérdidas}_i \,|_{(Y=\vec{y})} = BIN(N_i, p_i(\vec{y}))$$

cuando la economía está en estado $Y = \vec{y}$. De manera que las pérdidas totales son

$$L_{\text{total}} = \text{Pérdidas totales} \,|_{(Y=\vec{y})} = \sum_{i;\text{bloques}} BIN(N_i, p_i(\vec{y}))$$

Los estados Y siguen una distribución de probabilidad m-dimensional, donde m es el número de variables que entran en la codificación de la economía. Necesitamos conocer $\mathbf{P}\left(\text{Pérdidas totales} > x\right)$ para cualquier x, pero esto es

$$\mathbf{P}\left(\text{Pérdidas totales} > x\right) = \int_{\vec{y}} \mathbf{P}\left(\text{Pérdidas totales} > x \mid Y = \vec{y}\right) f_Y(\vec{y}) d\vec{y}.$$

Tenemos que ser capaces de calcular ágilmente para cualquier $\vec{y}$:

$$\mathbf{P}\left(\sum_i BIN\left(N_i, p_i(\vec{y})\right) > x\right).$$

No se trata de la esperanza de una suma, sino de la probabilidad de que se dé la cola de una suma. Como el estado de la economía está fijo, las pérdidas de los distintos bloques son independientes.

Aquí viene en nuestra ayuda la transformada de Laplace o la función generatriz de probabilidad:

$$f_{L_i}(s) = \mathbf{E}\left(s^{L_i}\right) = \sum_{n=0}^{N_i} \mathbf{P}\left(L_i = n\right) s^n \qquad \text{y} \qquad f_L(s) = \mathbf{E}\left(s^L\right).$$

Además,

$$f_L \equiv \prod_i f_{L_i}.$$

Es fácil escribir explícitamente cada uno de los polinomios f_{L_i} que codifican las pérdidas de los distintos bloques.

Todo se reduce al final a ser capaces de multiplicar estos polinomios, eficientemente. Esa multiplicación tiene que ser ágil pues hay que calcularla para todo valor de $\vec{y}$ o, al menos, para una muestra bien poblada. Se trata de obtener el polinomio producto de dos polinomios de alto grado. Para obtener el polinomio producto podemos especificar sus coeficientes, y obtener éstos a partir de los coeficientes de los factores. Pero esto es computacionalmente oneroso.

Alternativamente, podemos especificar el polinomio a partir de los valores que toma en un número suficiente de puntos. Esto es muy eficiente si se escogen los puntos para evaluar de forma astuta: es la transformada rápida de Fourier. Los puntos astutos para evaluar son las raíces 2^N de la unidad, y la clave es que si p es un polinomio de grado 2^N se puede escribir como

$$p(z) = q(z^2) + z \times r(z^2)$$

donde q y r son polinomios de grado 2^{N-1}. Además, $z \mapsto z^2$ lleva raíces 2^{N-1} de la unidad en raíces 2^N de la unidad.

7. FINALE

¿Qué pensaría nuestro querido paisano después de esta vertiginosa[22] inmersión en las matemáticas que estaban detrás de aquel fatuo *«Nada, que no me da el scoring»* que le espetaron? Incluso, ¿qué pensaría la propia empleada de la oficina bancaria?

Piénselo, pero, por favor, no lo diga en voz alta porque hay ropa tendida.

BIBLIOGRAFÍA

GUNDLACH M Y LEHRBASS F. (eds.). *CreditRisk+ in the Banking Industry*. Springer Verlag, 2004.

MCNEILL AJ, FREY R Y EMBRECHTS P. *Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques, and Tools.* Princeton Series in Finance, Princeton University Press. 2005.

THOMAS LC, CROOK JN Y EDELMAN DB. *Credit Scoring & Its Applications.* SIAM Monographs on Mathematical Modeling and Computation, SIAM, 2002.

[22] ¿Atolondrada?