

La transformada de Fourier y la sismología estelar

Clara Régulo Rodríguez
Universidad de La Laguna e Instituto de Astrofísica de Canarias

INTRODUCCIÓN

En el marco de este curso interdisciplinar, tal y como el título de esta charla indica, lo que vamos a hacer es relacionar la Transformada de Fourier (TF), técnica matemática muy conocida y ampliamente utilizada, con una parte de la astrofísica mucho menos conocida, pero no menos interesante: la sismología estelar.

Comenzaremos con un resumen de la TF, analizando qué puede aportar esta técnica matemática y qué es lo que hace de ella una técnica tan ampliamente utilizada. Pasaremos después a introducir la sismología estelar que es, en cierta medida, un renacimiento de la ancestral teoría de la «Música de las Esferas». Este concepto surgió en el pensamiento humano hace 2500 años con Pitágoras. Los pitagóricos creían que las esferas celestes emitían sonidos armoniosos que se combinaban produciendo la «Música de las Esferas». Esta idea se prolongó durante 2000 años en el pensamiento humano y no murió hasta hace 400 años con Kepler. Kepler intentó, por todos los medios, explicar el movimiento de los planetas atendiendo a armonías musicales. Sin embargo, tuvo la grandeza de darse por vencido y renunciar a aquello que más deseaba que fuera verdad ante la evidencia de las leyes puestas de manifiesto por él mismo. Sin embargo, en 1970, los astrofísicos descubrieron que, en el interior de las estrellas, existen ondas de sonido, que las estrellas pulsan, vibran, que existe una verdadera «Música de las Esferas». Y mucho más, que esas vibraciones de las estrellas nos permiten algo impensable hasta ese momento: acceder a su interior, una de las partes del Universo más inaccesibles a la investigación científica, que hasta entonces sólo se podía modelizar. Con esto pasaremos a la tercera y última parte de la charla, en la que conectaremos las dos anteriores viendo cómo puede la TF ayudarnos a obtener la información que buscamos en el interior de las estrellas.

LA TRANSFORMACIÓN DE FOURIER (TF)

Comencemos por tanto recordando qué es la TF. Cuando queremos analizar una señal, al igual que cuando uno quiere analizar cualquier otra cosa, la mejor manera de hacerlo es descomponiéndola en sus partes elementales. Podemos descomponer una señal en sus bloques elementales mediante una transformación matemática. Existen distintos

tipos de transformaciones matemáticas y cada una de ellas nos permite hacer una descomposición diferente de la señal, en función del problema que estemos tratando de resolver. Una de estas transformaciones matemáticas es la TF, en la cual la señal se descompone en funciones sinusoidales de duración infinita y amplitud constante. Esta descomposición nos va a permitir encontrar las posibles señales estables que configuren nuestra señal original de una forma rápida y sencilla, como veremos enseguida. Pero antes de continuar, vamos a puntualizar qué entendemos por señal. Una señal es cualquier variable física que representa el mensaje en un sistema de comunicación. Dicho así pudiera parecer complicado, pero no lo es en absoluto. Pensemos en nuestro caso, en la astrofísica: la información que recibimos de los objetos celestes nos llega a partir de su luz. La luz, los fotones que nos llegan, representa la variable física que porta el mensaje, la información. Vamos a fijarnos en la figura 1, donde tenemos una señal solar; en el eje de ordenadas aparece el número de puntos que componen nuestra señal. Estas medidas se toman cada 60 segundos, un punto cada 60 segundos; es decir, que el eje OX nos indica el tiempo. En el eje de abscisas podemos pensar que tenemos el número de fotones que nos están llegando en cada instante de tiempo. Vemos que esta cantidad, la señal, varía con el tiempo. Esta señal está formada por la superposición de señales estables (cuya importancia veremos más adelante), pero ¿cuáles son estas señales estables que la configuran? Esto nos lo va a proporcionar la TF.

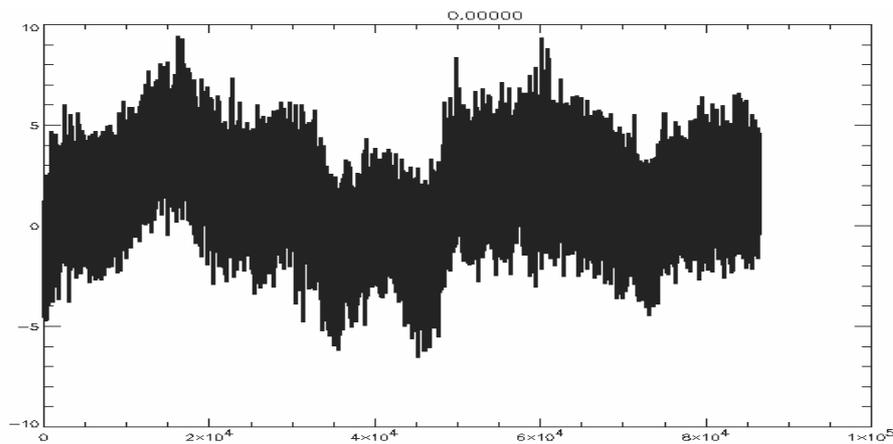


Figura 1. 20 días de datos del instrumento GOLF en el satélite SOHO. En el eje de ordenadas tenemos número de puntos y el de abscisas velocidad en m/s.

Matemáticamente, la Transformada de Fourier $F(\nu)$ de una señal $f(t)$ viene dada por:

$$F(\nu) = \int f(t)e^{-2\pi i\nu t} dt.$$

Dada la señal $f(t)$ (los fotones que llegan en función del tiempo), la TF genera otra señal $F(\nu)$ que es función de la frecuencia o periodo de las señales sinusoidales que componen la señal original. Cuando tenemos una función sinusoidal, su periodo es la

distancia entre dos máximos sucesivos de la onda y la frecuencia es la inversa de ese periodo. Así, si representamos la TF de la señal que aparece en la figura 1, tal y como hemos hecho en la figura 2, vemos que nos aparece una serie de rayas de distinta amplitud o potencia, cada una de las cuales corresponde a una frecuencia o periodo. Es decir, la TF de la señal nos proporciona las frecuencias y las amplitudes de las ondas sinusoidales que la configuran y lo hace de una forma clara e inmediata mediante una sencilla operación matemática, que tarda apenas un segundo en realizarse con un ordenador.

A la vista de este resultado podemos entender por qué la TF es una técnica matemática tan ampliamente difundida, dado que la gran mayoría de las señales son susceptibles de ser analizadas mediante esta técnica y una señal es cualquier variable física que contenga información del fenómeno físico que la produjo. Así, dada una señal, su TF nos proporciona de forma rápida e inmediata qué señales estables la configuran. Por supuesto que no siempre la TF es la más adecuada para analizar nuestra señal, pero aún en ese caso es bastante común empezar por ella, dada su sencillez, para hacernos una idea de las características de la señal y para ayudarnos a descubrir qué otra transformación puede resultarnos más adecuada.

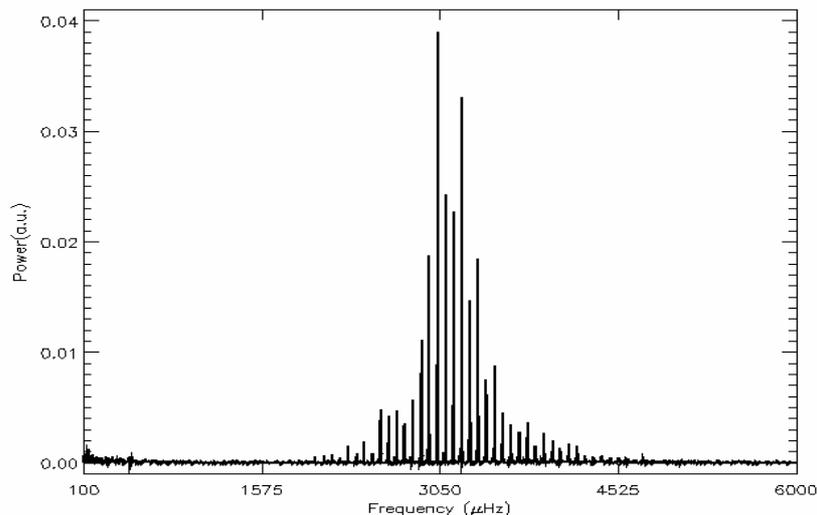


Figura 2. Módulo al cuadrado de la TF (espectro de potencias) de la señal mostrada en la figura 1 pero con 60 días de datos.

Aunque hemos dicho que la TF es muy sencilla matemáticamente, lo que también es importante puntualizar es que no siempre es tan sencillo obtener la señal de forma adecuada para su análisis mediante la TF. En la TF tenemos dos parámetros fundamentales que es importante entender: por una parte, la resolución que vamos a ser capaces de alcanzar y, por otra, la frecuencia máxima a la que podemos llegar. Si volvemos a la figura 2, la resolución es cuánto de separadas vamos a conseguir observar las distintas frecuencias y esto es función del tiempo total de observación, es decir: cuanto más tiempo estemos observando, mejor resolución tendremos, más separadas estarán nuestras frecuencias en la TF. En este ejemplo solar, necesitamos una resolución de 0.4 μHz para poder observar las distintas frecuencias sin que se nos mezclen unas con otras y

eso significa que necesitamos observar, al menos, durante 2 meses seguidos. El otro parámetro, la frecuencia máxima que vamos a ser capaces de observar, viene dado por el intervalo de muestreo, es decir, cómo de rápido o lento observamos, puesto que no es lo mismo tomar un dato cada segundo, que tomarlo cada hora. De nuevo en nuestro ejemplo, tenemos frecuencias hasta casi $5.500 \mu\text{Hz}$ y esto significa que para poder llegar a esa frecuencia necesitamos tener un dato cada 80 segundos o más rápido. Ya nos podemos dar cuenta de que esto no es sencillo: observar al Sol durante 2 meses seguidos tomando un dato cada 80 segundos no es trivial y menos si lo que vamos a observar es una estrella, como veremos enseguida.

Con estas ideas sobre lo que es la TF y lo que nos permite entender de la señal que queremos analizar, vamos a cerrar el primer bloque de la charla y pasar al segundo, a intentar definir qué es y para qué sirve la sismología estelar.

LA SISMOLOGÍA ESTELAR

El objetivo de la astrofísica es el estudio de los objetos celestes. Esto, en gran medida, significa el estudio de las estrellas, puesto que las estrellas son el componente básico del Universo. Si nos centramos en ellas, nuestro interés se basa en entender qué es una estrella, en conocer su composición química, su estructura, cómo se ha formado, cómo evoluciona, etc. Ahora bien, todos estos conocimientos sólo los podemos adquirir analizando la luz que nos llega de las estrellas y esa luz nos llega sólo de su superficie: la estrella es opaca. Si miramos la figura 3, que representa al Sol, al observarlo lo que vamos a ver es lo que aparece en la parte izquierda de la figura, es decir, su superficie; toda la estrella, desde su núcleo hasta la superficie que tenemos dibujada en la parte derecha de la imagen, es imposible de observar directamente, pero eso es lo que necesitamos conocer. ¿Cómo hacerlo? Sólo existen dos caminos: por medio de modelos físico-matemáticos que, a partir de las leyes de la física y los observables que se tienen sean capaces de inferir cómo es el interior de las estrellas, o bien a partir de la observación de las ondas que se propagan en el interior de las estrellas y que se pueden observar en su superficie, que es lo que se conoce como sismología estelar. La sismología estelar está basada en las mismas técnicas que se han utilizado para conocer cómo es el interior de nuestro planeta, al que tampoco tenemos acceso: las técnicas sismológicas. Estas técnicas se basan en el estudio de un objeto a partir de las ondas que se propagan en su interior. El tipo de ondas así como las características de las ondas que son capaces de propagarse en el interior de un objeto dependen de las características físicas del objeto, de su forma, composición química, densidad, etc.

En el interior de ciertas estrellas, como por ejemplo el Sol, que se encuentran quemando hidrógeno en su núcleo, existe una zona convectiva externa, es decir, una zona de la estrella cercana a su superficie en la cual la energía que se produce en su interior se transmite por un movimiento real de la materia, conocido como convección. En este tipo de estrellas se generan, en la zona convectiva, ondas de sonido. Estas ondas se propagan en el interior de la estrella y se reflejan, tanto en su superficie como en su interior, formándose ondas estacionarias. Estas ondas estacionarias producen pequeñísimos movimientos en la superficie de las estrellas que son, en principio, medibles como variación en el número de fotones que nos llegan en función del tiempo.

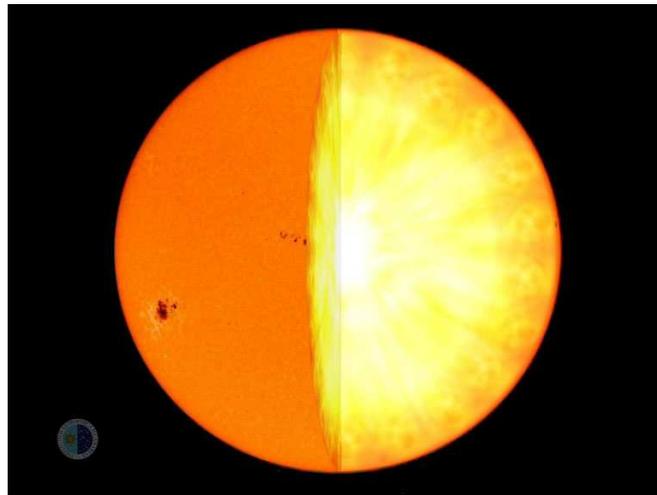


Figura 3. Imagen del Sol con un corte que nos permite observar su interior.

Estas ondas dependen de las características internas de las estrellas. Sus frecuencias y amplitudes proporcionan información muy valiosa, dado que son diferentes para estrellas con distintas condiciones físicas por lo que, a partir de ellas, podemos conocer las características internas de las estrellas, que es nuestro objetivo final. En la figura 4 tenemos una representación del efecto que produce una de estas ondas estacionarias en la superficie del Sol; las zonas azules son zonas de la estrella que estarían acercándose a nosotros y las rojas zonas que se alejan.

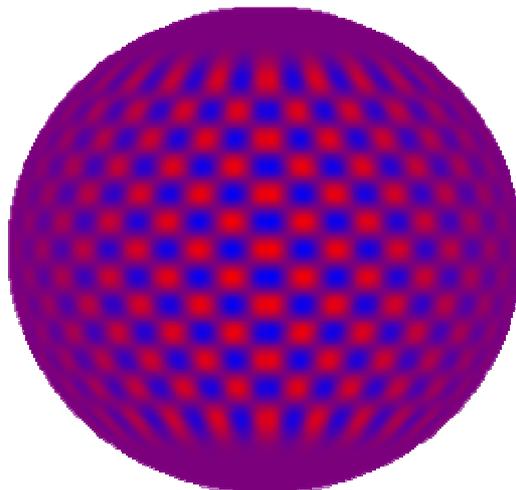


Figura 4. Aspecto que presentaría la superficie solar como consecuencia de las ondas estacionarias que se propagan en su interior.

Sin embargo, como siempre que se va a la vida real, las cosas no son tan sencillas. La señal que necesitamos medir, la variación del número de fotones debido a las perturbaciones que en la superficie de las estrellas producen las ondas estacionarias que se propagan en su interior, es tan pequeña que sólo se ha podido medir bien para la

estrella que tenemos más cerca, el Sol. Imagínense el interés, la importancia de poder medir esta señal para otras estrellas parecidas al Sol, pero no iguales y con edades diferentes, lo que nos permitiría contrastar de forma observacional la veracidad de los modelos que se tienen para las estrellas.

Llegados a este punto ya tenemos una idea de qué es la sismología estelar y qué buscamos a través de ella. Ahora es muy sencillo comprender cómo puede ayudarnos la TF, al menos si tenemos datos adecuados, a encontrar aquello que estamos buscando, que no es otra cosa que las señales estables (las ondas estacionarias) que configuran las señales de la variación de los fotones emitidos por las estrellas en función del tiempo. Y ya sabemos por qué estas señales estables son tan importantes de obtener, puesto que es lo único que nos va a proporcionar información de cómo es el interior de las estrellas.

Tenemos entonces el hecho de que realizar las observaciones es muy difícil, dado que las amplitudes de las señales que intentamos medir son muy pequeñas (de hecho, son de una parte en un millón: la millonésima parte del valor medio recibido) y la atmósfera de la Tierra, a través de la cual se realizan las observaciones, introduce un ruido casi mayor que lo que estamos intentando observar. Por otra parte, como ya vimos, se necesitan periodos largos de observación continuados, lo que desde Tierra implica observar al menos con dos telescopios situados en hemisferios diferentes y, a ser posible, grandes, dado lo pequeño de la señal que queremos estudiar. Les puedo asegurar que conseguir tiempo de observación en dos telescopios grandes a la vez y durante periodos largos de tiempo para observar objetos brillantes es poco menos que imposible. Por supuesto está la solución de los satélites, que también son muy difíciles de conseguir y muy caros; de momento, el único satélite en órbita destinado a la observación sismológica es un pequeño satélite canadiense (MOST), casi una cámara de fotos en el espacio, que se lanzó en junio de 2003 y del que veremos algún resultado a continuación. Y las grandes expectativas están puestas en el satélite COROT, un satélite francés con colaboración de casi toda Europa, lanzado a finales de diciembre de 2006.

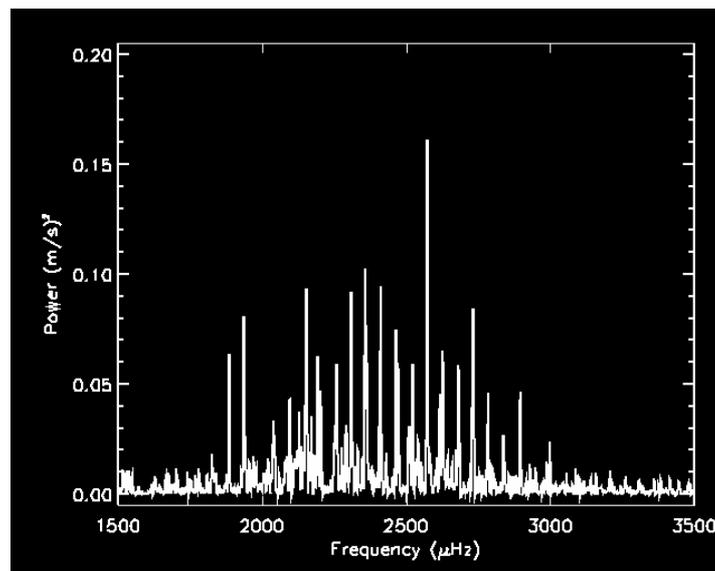


Figura 5. Espectro de potencias de la señal de oscilaciones obtenida para α Cen A.

OBSERVACIONES NO SOLARES

Pero en tanto llegan los datos de COROT, vamos a ver qué se tiene hasta este momento. Vamos sólo a comentar las dos mejores observaciones de estrellas de tipo solar distintas del Sol que se tienen hasta el momento, una desde Tierra y otra desde el satélite MOST.

Desde Tierra, las mejores observaciones que se tienen corresponden a la estrella α Cen A. Esta estrella, la más cercana a nosotros, a sólo 3 años luz de distancia, fue observada durante una semana (de la cual sólo 4.5 días fueron buenos) con dos grandes telescopios a la vez, uno de 8 metros en Chile y otro de 4 metros en Australia. La TF de los datos obtenidos está representada en la figura 5 (realmente lo que está representado es el espectro de potencias de la señal, que es el módulo de la TF al cuadrado). Estos resultados fueron en verdad espectaculares. Pese a que tener sólo 4.5 días de datos implica que la resolución es demasiado pequeña para extraer información precisa, lo que sí queda muy claro de estas observaciones es que esta estrella, tal y como predice la teoría, tiene oscilaciones similares a las solares, aunque con diferencias que se ajustan bien a las diferencias conocidas entre ambas estrellas. Estos datos dejan claro que es posible observar las ondas estacionarias en estrellas distintas del Sol y que dichas observaciones, con la precisión suficiente, nos abren el camino para llegar a un conocimiento mucho más profundo de las estrellas del que tenemos hasta ahora. El lanzamiento de COROT y los datos que se obtengan con esta misión pueden ser claves para nuestra comprensión de muchos detalles oscuros en nuestro conocimiento del interior estelar.

El otro resultado interesante que vamos a comentar es el obtenido por el satélite MOST de la estrella Procyon, casi un gemelo del Sol situada a 11.4 años luz de distancia que se observó durante 32 días seguidos tomando un dato cada minuto, es decir, en muy buenas condiciones, puesto que se observó desde fuera de la atmósfera terrestre, durante mucho tiempo, más de un mes, y con un muestreo adecuado. Sin embargo, al analizar los resultados, lo que se encontró en la TF fue sólo ruido. Si miramos la figura 6, en la que aparece el espectro de potencias de los datos obtenidos para esta estrella y la comparamos con la figura 2, a la que debería parecerse mucho, nos encontramos con que no es lo que esperábamos. Este resultado levantó una gran polémica dado que estaba diciendo que la teoría tenía algún problema. Sin embargo, hay otra respuesta posible: el satélite produce observaciones con bastante ruido debido a lo pequeño que es y, por tanto, a su poca estabilidad. Entender que las oscilaciones de Procyon sean de una amplitud algo menor que lo esperado es perfectamente asumible dentro de la teoría existente, por lo que existe la posibilidad de que la señal esperada sí esté ahí, pero dentro del ruido. Pues bien, como veremos enseguida, la TF también puede ayudarnos a resolver este problema.

La señal estelar que esperamos encontrar tiene la característica de que su TF presenta frecuencias equiespaciadas, lo que nos permite buscar este equiespaciamiento en los datos, en lugar de buscar las propias frecuencias. La búsqueda de este equiespaciamiento se hace más sencillo si lo hacemos en la TF de la TF de la señal, dadas sus características matemáticas.

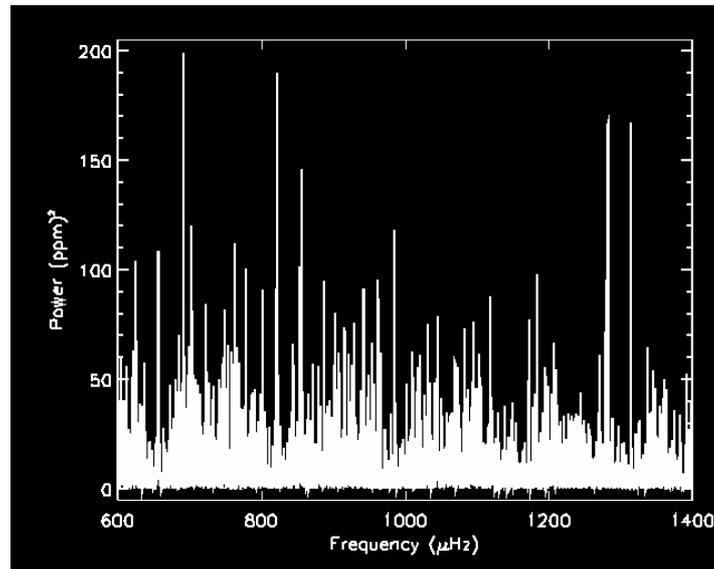


Figura 6. Espectro de potencias de la señal de oscilaciones obtenida para Procyon.

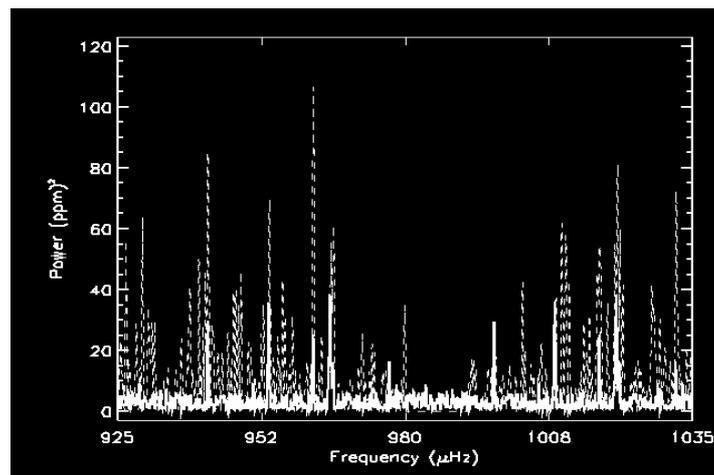


Figura 7. Trozo del espectro de potencias original de Procyon, en trazo discontinuo, al que se le ha superpuesto, en trazo continuo, el espectro recuperado a partir del análisis de la señal.

Si lo encontramos tenemos ya una información muy valiosa, puesto que nos está diciendo que, aunque dentro del ruido, la señal existe y además, dado que el equiespaciamiento es diferente para las distintas estrellas, en función de sus características físicas, nos proporciona también información sobre la propia estrella. Pero aún más, podemos seleccionar en esta TF las posiciones en las que nos aparece la señal, poner el resto a cero y hacer la antitransformada matemática, lo que nos va a permitir recuperar la TF de la señal original pero con mucho menos ruido. Esta técnica de usar la TF en la búsqueda de señal dentro de ruido la hemos aplicado a los datos de Procyon. Así hemos logrado comprobar que la señal esperada efectivamente existe, lo que nos tranquiliza puesto que, al menos de momento, los modelos siguen siendo capaces de

responder a las observaciones que se tienen. En la figura 7, sobre un trozo de del espectro de potencias ruidoso de los datos de las oscilaciones de Porción se ha dibujado el espectro de potencias recuperado casi sin ruido, en el que se observan algunas de las frecuencias de la estrella.

CONCLUSIONES

Como conclusión tenemos entonces que hemos aplicado la TF para analizar datos sismológicos de estrellas de tipo solar. Hemos visto que la sismología estelar es la única forma de observar (indirectamente) el interior de las estrellas, lo que nos permite validar los modelos estelares. Hemos aplicado la TF de forma directa, descomponiendo la señal en sus componentes básicas, y de forma indirecta, para la búsqueda de señal inmersa en ruido. Para esto último hemos hecho uso de las características matemáticas que presenta la TF de la señal de las estrellas similares al Sol. Con ello, y utilizando la TF, hemos visto que se puede construir una herramienta matemática eficaz para analizar las señales de muchas estrellas que no se pueden detectar de forma directa.

BIBLIOGRAFÍA

- BRIGHAM EO. *The Fast Fourier Transform and its Applications*. Prentice Hall Signal Processing Series, 1988.
- COX JP. *Theory of Stellar Pulsation*. Princeton University Press, 1980.
- Proyecto CoRoT (participación española)*, <http://www.iaa.es/corot/mainC.html>.
- SCHATZER L. *Alpha Centauri*, <http://homepage.sunrise.ch/homepage/schatzer/Alpha-Centauri.html>.
- SOHO*, <http://soho.nascom.nasa.gov>.