sctm06
sociedad, ciencia, tecnología y matemáticas 2006

Poliedros y teoremas de papel

José Ignacio Royo Prieto
Universidad del País Vasco/Euskal Herriko Unibertsitatea

RESUMEN

En esta exposición se muestran algunos aspectos de la papiroflexia, el antiguo arte de doblar el papel, en los que las matemáticas tienen un papel destacado.

1. INTRODUCCIÓN

1.1 ¿QUÉ ES LA PAPIROFLEXIA?

La papiroflexia es el arte de hacer figuras reconocibles utilizando papel plegado. Según la corriente más ortodoxa de la papiroflexia, tan sólo está permitido plegar el papel, es decir, no se pueden usar tijeras ni pegamento. Además, se deberá utilizar como punto de partida un único trozo de papel cuadrado. A pesar de que estas normas puedan parecernos muy restrictivas, las posibilidades que nos ofrece la papiroflexia son casi infinitas.

Los diseños más populares en España son la pajarita de papel, el gorro de papel y el barquito, así como algún que otro avión. Estos diseños son muy simples pero, en las últimas décadas, papiroflectas de todo el mundo han desarrollado técnicas a cual más compleja para obtener modelos de muchas puntas. Coches, barcos, aviones, muebles, leones, perros, insectos con todas sus patas y antenas, mamíferos con todo tipo de cuernos, orejas y colas, dragones, dinosaurios, esqueletos, pulpos, peces, crustáceos, arañas, seres humanos, máscaras... Seres animados e inanimados, reales y fantásticos, sencillos y con todo lujo de detalles forman parte del inmenso repertorio de la papiroflexia moderna (ver figura 1).

El origen de la papiroflexia hemos de situarlo en Japón. La palabra japonesa para la papiroflexia es *origami* (figura 2). Su escritura está compuesta por dos caracteres: En el primero, el radical de la izquierda deriva del dibujo de una mano, y significa doblar (*ori*). El segundo deriva del dibujo de la seda, y significa papel (*kami*).

Aunque el arte de doblar papel se practique en Japón desde hace siglos, la papiroflexia ha experimentado una auténtica explosión de creatividad en las cuatro últimas décadas, debida, por una parte, a la mejor comunicación de los modelos y, por otra, al desarrollo de técnicas para realizar figuras cada vez más complejas. De una papiroflexia intuitiva y secuencial, en el sentido de que crear una figura consistía en partir de una base y, por el método de ensayo y error, avanzar hasta que se pareciera a algo reconocible, hemos pasado al *origami sekkei*, o papiroflexia intencionalmente diseñada, en la cual el diseñador realiza un estudio previo de la distribución de las puntas y capas del papel antes de ponerse a plegar, y utiliza métodos matemáticos para optimizar el aprovechamiento del papel. Grandes exponentes de este tipo de origami son los japoneses Jun Maekawa, Fumiaki Kawahata, Issei Yoshino, Toshiyuki Meguro, Satoshi Kamiya (figura 3), Hideo Komatsu y Takashi Hojyo, lista a la que hay que añadir al californiano Robert Lang, cuya divulgación y exposición sistemática de las técnicas matemáticas que usa para diseñar ha culminado en el libro [Lang1], gracias al cual el diseñar origami se ha hecho accesible a un público muy amplio.

Figura 1. Erizo de John Richardson[1].

Figura 2. Origami.

Otra rama de la papiroflexia moderna es la *papiroflexia modular*, en la cual se pliegan varias piezas sencillas independientemente para acabar ensamblándolas (sin pegamento, por supuesto) con el fin de formar un motivo casi siempre geométrico. Los pioneros de esta modalidad de origami son Robert Neale y Lewis Simon (EEUU, década de los 60), si bien quien más la ha impulsado en los últimos años es la genial japonesa Tomoko Fusè.

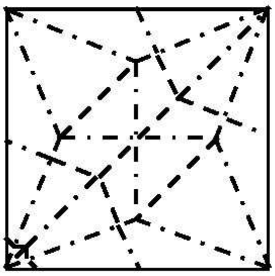
1.2 RELACIÓN DE LA PAPIROFLEXIA CON LAS MATEMÁTICAS

La mejor manera de darse cuenta de la relación entre las matemáticas y la papiroflexia es desplegar un modelo y observar el cuadrado inicial: aparece ante nuestros ojos un complejo de cicatrices que no es sino un grafo que cumple unas ciertas propiedades (figura 4). Intuitivamente, hay unas «matemáticas del origami» funcionando cuando plegamos un modelo.

Podemos señalar cuatro aspectos fundamentales en los cuales la matemática aflora en la papiroflexia:

[1] Foto y plegado de figura 1: Pere Olicella.

1) *Papiroflexia modular:* representación de poliedros y figuras geométricas.
2) *Herramienta pedagógica:* el plegado de papel puede servir para ilustrar y aprender diversos conceptos matemáticos.
3) *Axiomas de constructibilidad:* teoría de puntos constructibles con origami, paralela a la clásica con regla y compás.
4) *Diseño de figuras:* métodos matemáticos para la creación en papiroflexia.



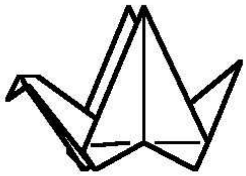


Figura 4. Pájaro aleteador, con su mapa de cicatrices.

Figura 3. *Mamuthus Primigenius*, de Satoshi Kamiya[2].

2. PAPIROFLEXIA MODULAR: CONSTRUCCIÓN DE POLIEDROS

2.1 PAPIROFLEXIA MODULAR

Como hemos comentado antes, la papiroflexia modular consiste en hacer figuras utilizando varios papeles que darán lugar a piezas individuales que llamaremos *módulos*. Cada uno de estos módulos posee solapas y bolsillos, que se usan para ensamblarlos entre sí. Es usual representar de esta manera figuras geométricas, y que el plegado de cada módulo sea sencillo. Los poliedros (figura 5) son la principal fuente de inspiración de esta modalidad, aunque no la única.

[2] Foto y plegado de figura 3: Guillermo García Crespo.

Aparte del valor artístico y estético de la papiroflexia modular, su interés para con las matemáticas es doble:

1) Nos permite la representación física de entes abstractos. En este sentido, tiene el mismo interés que puede tener un programa de ordenador que dibuje poliedros, si bien es mucho más revelador tener en la mano un icosaedro truncado (figura 6), palparlo y girarlo, que verlo en una pantalla donde simulamos su giro. Para este fin hay también recortables y figuras de plástico aunque, a decir verdad, la posibilidad práctica de representar poliedros con origami es mucho más amplia que con recortables.
2) Tanto en el diseño como en el plegado y ensamblaje de los módulos se experimentan de una forma muy sencilla las propiedades de los poliedros, tales como grado de un vértice, regularidad y simetría, ya que en su diseño intervienen de forma decisiva los conceptos de arista, índice, cara, vértice y otros más sofisticados como dualidad, colorabilidad, característica de Euler-Poincaré e incluso curvatura (ver construcción de toros de origami en [Hull1]).

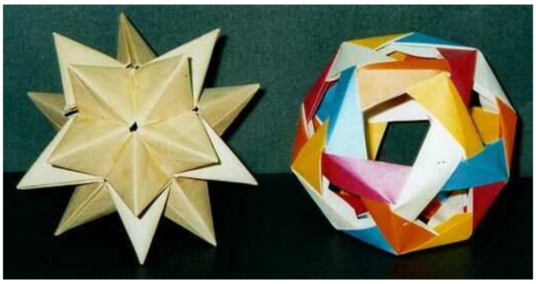


Figura 5. Dodecaedro y dodecaedro estrellado (Tomoko Fusè).

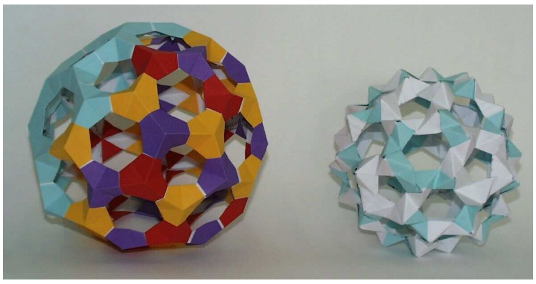


Figura 6. Icosaedros truncados con módulos de vértices (B. Arnstein) y aristas (T. Hull).

2.2 FAMILIAS DE MÓDULOS

Se puede hacer una clasificación de los modulares fijándonos en la estructura del poliedro que forman o, mejor dicho, dependiendo de en qué se fije uno para describir un poliedro: los vértices, las aristas o las caras. ¿Qué es, al fin y al cabo, un tetraedro? Podemos definirlo como cuatro vértices equidistantes, o como seis segmentos dispuestos de una determinada manera, o como cuatro caras triangulares. En una vuelta de tuerca sorprendente, un cubo puede definirse como un tetraedro estrellado. Todo esto es fácil de experimentar con la papiroflexia. Según esto, distinguimos tres tipos de módulos:

1) *Módulos basados en las aristas.* Suelen ser los de ensamblaje más sólido. Cada módulo corresponde a una arista, lo cual hay que tener en cuenta a la hora de diseñarlos. Por lo general, suelen presentar caras perforadas, que nos permiten ver el interior.
2) *Módulos basados en las caras.* Parece lo más natural, pero no siempre es lo más fácil de diseñar en papiroflexia. Los empalmes suelen ser más débiles, lo cual se debe a que las caras se juntan entre sí de dos en dos, mientras que las aristas se juntan de más en más en cada vértice.

3) *Módulos basados en los vértices*. Los más importantes son de tipo *giroscopio* (ver [SAG]). Muy versátiles y resultones. Dentro de este tipo se pueden clasificar por el grado: los que agrupan aristas de 3 en 3, de 4 en 4...

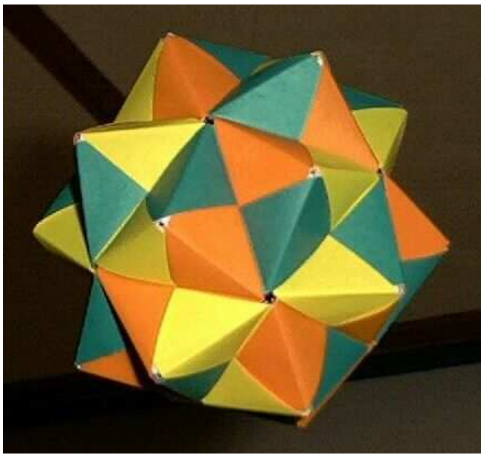


Figura 7: Icosaedro estrellado con módulos de Sonobè.

2.3 MÓDULOS DE TIPO SONOBÈ: POLIEDROS ESTRELLADOS

Son probablemente los módulos más populares y se deben al japonés Mitsunobu Sonobè. Estos módulos se juntan de 3 en 3 para formar una pirámide con base un triángulo equilátero y con ángulos rectos en el vértice. Son, por lo tanto, muy adecuados para construir poliedros estrellados cuyas caras son triángulos: icosaedro estrellado (figura 7), octaedro estrellado...

Podemos considerar que estos módulos pertenecen la familia de las caras, pero no sólo los podemos usar con caras triangulares: podemos juntarlos de 4 en 4, obteniendo como base un cuadrado y sobre él lo que podríamos denominar una estrellación de segunda especie (cuatro pirámides cuyas bases no caen en un plano). De la misma forma, juntándolos de diversas maneras podemos obtener polígonos con estrellaciones muy barrocas, donde las caras aparecen de una manera más especial, pero con su sentido artístico y estructural (ver [Kasa]).

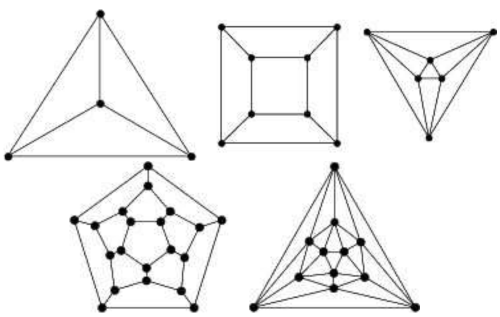


Figura 8. Grafos de los sólidos platónicos.

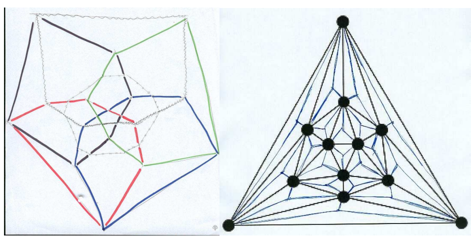


Figura 9. Seis ciclos en un icosidodecaedro; grafo del triacontaedro**.**

2.4 COLORACIÓN

Un reto interesante sobre el módulo Sonobè consiste en colorear sus caras de una forma coherente. Para abordar esto nos será útil el concepto de *grafo* de un poliedro.

2.4.1 *Grafo de un poliedro*

Sin querer ser demasiado preciso, un grafo es un complejo finito de vértices y aristas (figura 8). Un grafo es *plano* si se puede dibujar en $\mathbb{R}^2$ de modo que las aristas no se corten; tan sólo pueden juntarse en los vértices. En un grafo consideraremos vértices, aristas y caras. Llamaremos *grado de un vértice* al número de aristas que concurren en él. A todo poliedro le podemos asociar de forma fácil un grafo plano: basta tomar una cara y realizar una suerte de proyección estereográfica en el plano. Por supuesto, consideramos la componente no acotada como una cara.

Una ventaja de los grafos es que nos permiten estudiar los poliedros de una forma más fácil que representándolos en el espacio.

2.4.2 *Coloración de icosaedros*

Entendemos por una *buena coloración* la asignación de colores a los vértices, aristas o caras de modo que cumplan alguna regularidad, por lo general, del tipo de que elementos contiguos tengan colores distintos.

Para pensar en una coloración del icosaedro estrellado con módulos Sonobè habrá que conseguir su grafo a partir del de nuestro icosaedro, sin más que unir en cada uno de sus triángulos el punto medio con sus vértices. El grafo que así obtenemos es el de un triacontraedro (figura 9). Como éste es dual del icosidodecaedro, nos basta colorear las aristas de este último. Si nos fijamos en los módulos de Sonobè, además, tenemos que por cada módulo coloreamos dos aristas «contiguas» del icosaedro estrellado. Esto nos sugiere construir seis circuitos de colores de la forma que vemos en la ilustración, obteniendo seis «círculos máximos» sobre el icosaedro estrellado. Volviendo al módulo de Sonobè, si quiero hacer una coloración con tres colores, he de elegir los circuitos máximos de dos en dos y, en los puntos de cruce de ambos circuitos, dejar que pase el uno sobre el otro y el otro sobre el uno. De esta forma, obtenemos un arlequinado del icosaedro estrellado Sonobè tal que en cada vértice se unen los tres colores. Como vemos, para colorear un icosaedro estrellado hay que pensar en un icosidodecaedro.

2.5 DUALIDAD

Otro concepto que se puede representar con la papiroflexia es la dualidad de poliedros. Dado un poliedro, podemos tomar los puntos medios de cada cara y unir los de caras contiguas. Sorprendentemente, mediante este procedimiento obtenemos un nuevo poliedro. Para comprender mejor la idea, vamos a expresarla con grafos: se construye el dual de un grafo como el grafo que tiene como puntos los puntos medios de cada cara, y que tiene como aristas las aristas que resultan de unir los puntos pertenecientes a caras contiguas, atravesando las aristas originales. Poliedros duales corresponden a grafos duales. La relación «ser duales» es recíproca.

Figura 10. Dualidad icosaedro-dodecaedro.

De este modo se puede comprobar que el dual del tetraedro es el mismo tetraedro, el dual del icosaedro es el dodecaedro, y el dual del cubo es el octaedro. En papiroflexia podemos representar esa dualidad valiéndonos de módulos de tipo arista del dodecaedro que presenten agujeros en cada cara, además de usar un material transparente como lo es el acetato (figura 10).

3. TEOREMAS DE PAPEL

La papiroflexia, entendida como ejercicio de doblar papel, se puede usar con fines pedagógicos para estudiar e ilustrar la geometría elemental plana (ver, por ejemplo, la sección de papiroflexia del portal de divulgación DivulgaMAT [Div]). Sobre ello hay numerosos libros, siendo una excelente referencia el de Sundara Row [Row] donde se proponen diversos ejercicios mediante los que se resuelven problemas referentes a cónicas, ecuaciones polinómicas y trigonometría utilizando tan sólo los dobleces del papel. Una referencia más moderna que contiene una buena exposición de las matemáticas de alto nivel que se pueden aprender doblando papel es el libro [Hull4], del matemático Tom Hull.

La clave consiste en interpretar geométricamente qué estamos haciendo cuando doblamos el papel. Por ejemplo, cuando doblamos los dos lados que concurren en una esquina, uno sobre el otro, estamos calculando una bisectriz. Cuando llevamos un punto del papel sobre otro y doblamos, estamos trazando la mediatriz del segmento que definen los dos puntos. Con papiroflexia es sencillo dibujar la envolvente por rectas tangentes a una parábola definida por su foco y su recta directriz, probar que el área de un triángulo es base por altura partido por dos, o sumar la serie $\Sigma\, 1/2^n$ sin más que hacer unos cuantos dobleces y pensar su significado.

4. CONSTRUCTIBILIDAD DE PUNTOS EN ORIGAMI

También se puede analizar qué puntos son constructibles con origami, de la misma manera en la que se estudia qué puntos son constructibles con regla y compás.

En 1995, D. Auckly y J. Cleveland publicaron una nota en el American Mathematical Monthly en la cual probaban que todo punto constructible con papiroflexia era constructible con regla y compás, pero que el inverso no era cierto. Sin embargo, tal y como hace notar Tom Hull en la misma revista (ver [Hull3]), hay un método, desarrollado por el japonés Hisashi Habe en la década de los 70, mediante el cual se puede trisecar cualquier ángulo dado con un par de pliegues que son perfectamente razonables en papiroflexia. ¿Dónde está la contradicción? Lo que ocurre es que a la hora de definir los números constructibles con papiroflexia hay que realizar una axiomática de lo que consideramos «razonable» de obtener en papiroflexia plegando. En la literatura de la papiroflexia se pueden encontrar métodos para trisecar ángulos, duplicar cubos y doblar heptágonos regulares, todos ellos con pliegues sencillos.

Se debe al italo-japonés Humiaki Huzita la formulación de la axiomática más utilizada para definir los puntos constructibles con papiroflexia. El movimiento axiomático que genera puntos no constructibles con recta y compás es el siguiente: dados dos puntos $p1$ y $p2$ constructibles, y dos líneas constructibles $l1$ y $l2$, la línea que refleja a $p1$ en $l1$ y a $p2$ en $l2$, si es que existe, es constructible. Dicha línea nueva es una recta tangente común a dos parábolas de directrices $l1$ y $l2$ y focos $p1$ y $p2$. Puede probarse que encontrar la pendiente de esta parábola supone resolver una ecuación cúbica; es más, con este axioma se podría encontrar la raíz real de cualquier polinomio cúbico.

En un artículo de Roger Alperin aparecido en el *New York Journal of Mathematics* (ver [Alp]) se hace una discusión del alcance de los axiomas presentados y se caracterizan los «puntos de origami» como aquellos números del plano complejo $\mathbb{C}$ constructibles tras la aplicación finita de los axiomas de Huzita. El resultado central es:

Teorema (Alperin). El conjunto **O** de los puntos constructibles con origami se puede caracterizar de las siguientes maneras:

a) el menor subcuerpo de $\mathbb{C}$ cerrado por raíces cuadradas, cúbicas y conjugación compleja;
b) el conjunto de los puntos constructibles por intersección de líneas constructibles y cónicas constructibles (con directrices, focos, radios y excentricidades constructibles).

5. MÉTODOS MATEMÁTICOS DE DISEÑO

5.1 PROPIEDADES DEL MAPA DE CICATRICES DE UNA FIGURA PLANA

Como hemos comentado antes, al desplegar un modelo de origami descubrimos en el cuadrado un complejo mapa de pliegues, un grafo, al fin y al cabo, donde se forman valles (pliegues donde la arista está más baja que el papel próximo) y montañas (pliegues donde la arista del grafo es una cumbre).

Restringiremos nuestra atención a una clase de modelos más sencilla, los *modelos planos*, esto es, figuras de papiroflexia que se pueden meter en un libro sin añadir nuevas cicatrices o, dicho de otro modo, tales que el ángulo diedro en cada arista es múltiplo de π. La gran mayoría de modelos de papiroflexia entra dentro de esta categoría (figura 11).

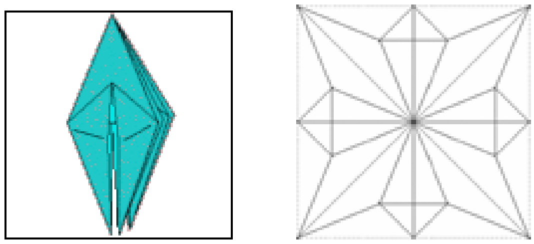


Figura 11. Base de la rana y su correspondiente mapa de cicatrices.

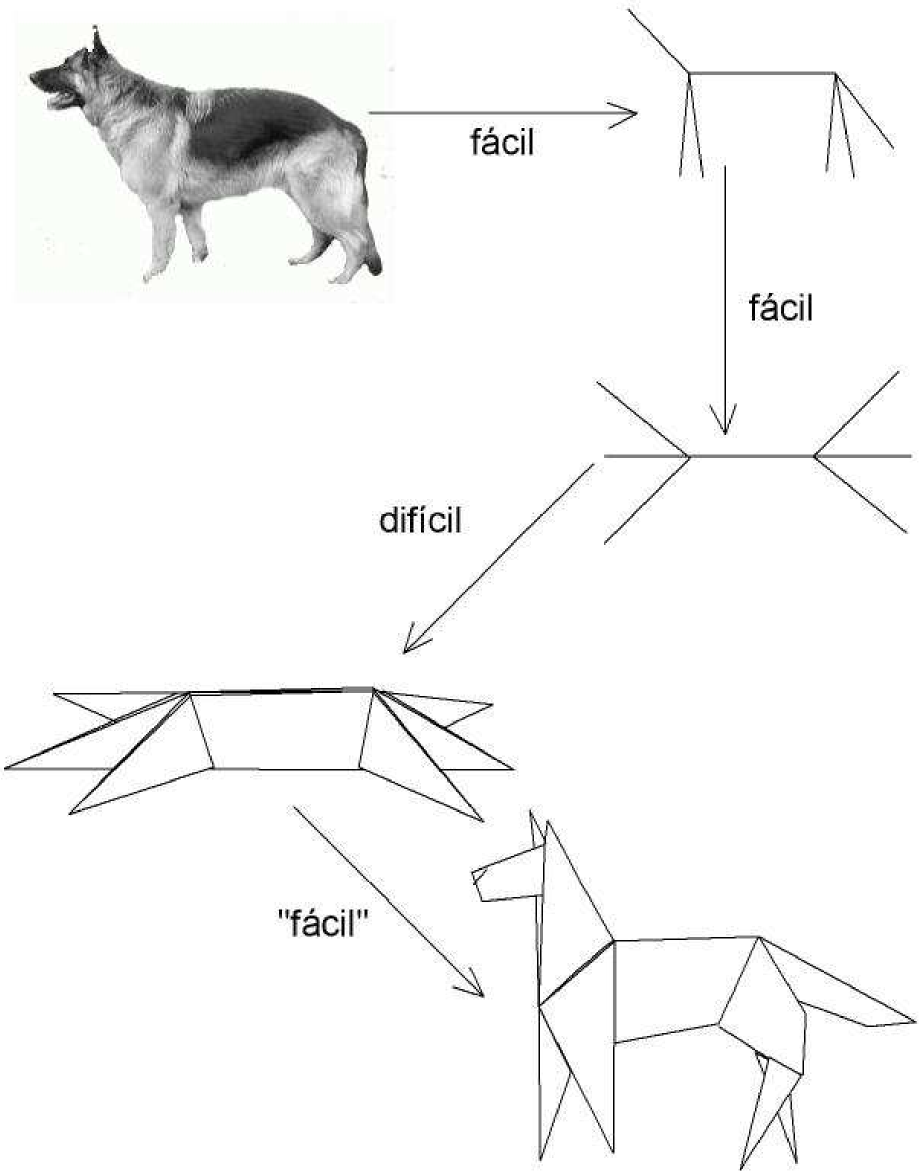


Figura 12. Esquema de modelización de la creación de un modelo.

El grafo del mapa de cicatrices de un modelo plano cumple una serie de propiedades, que han sido estudiadas por diversos plegadores, y que listamos a continuación. Las pruebas son elementales, pero no triviales:

- (*Maekawa*) La diferencia entre el número de pliegues en montaña y en valle en un vértice es siempre 2.
- El grado de cada vértice es par.
- (*Meguro*) Las caras de un mapa de cicatrices son 2-coloreables.
- (*Kawasaki*) Sean $\alpha_1,\ldots,\alpha_{2k}$ todos los ángulos concurrentes en un vértice, contiguos cada uno con el siguiente. Entonces:

$$\alpha_1 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_{2k-1} = \alpha_2 + \alpha_4 + \ldots + \alpha_{2k} = \pi.$$

- (*Hull*) La condición anterior es una condición suficiente.

T. Hull en [Hull2] halla más resultados sobre las propiedades que tiene que cumplir un grafo para corresponder a un modelo plano, y sobre las posibles asignaciones valle-montaña que tiene un grafo determinado.

5.2 MODELIZACIÓN DEL PROBLEMA Y OBTENCIÓN DE LA BASE.

Una base es una aproximación esquemática a la figura que queremos obtener. La base resulta de un número finito de pliegues en cuya forma final se pueden observar las solapas y puntas necesarias, con las longitudes deseadas, que nos llevarán al modelo que queremos. Una vez obtenida la base no es difícil llegar al modelo o, por lo menos, ya es una cuestión artística y abordable.

Consideraremos un tipo de bases: aquellas en las que se pueden distribuir las puntas de modo que la base se proyecta ortogonalmente en un grafo plano, simple y sin caras, tal y como vemos en la figura 12. El problema va a ser saber si dado un grafo de este tipo vamos a poder encontrar un mapa de cicatrices que proporcione una base que se proyecte sobre ese grafo, es decir, resolver el paso calificado como «difícil» en el esquema de la figura 12. Hay varios métodos y técnicas para conseguir esto, las cuales involucran usar herramientas matemáticas tales como el trazado de hipérbolas, empaquetado óptimo de círculos tangentes en un cuadrado (*circle packing*), etc. Un brillante compendio de esas técnicas puede encontrarse en la *magna opus* de Robert Lang: *Origami Design Secrets* (ver [Lang1]).

5.3.2 *El Treemaker de R. Lang*

El método del árbol (grafo sin caras) de Lang es un método de diseño similar al usado por Kawahata y Meguro (ver [Kawa] y [Voy]). Vamos a ilustrar su método con un ejemplo. Para conseguir un perro, diseña un grafo con aristas de determinada longitud, y las distribuye en el cuadrado intentando aprovechar toda la superficie del cuadrado. Ahora cabe plantearse si existirá un mapa de cicatrices conteniendo este árbol que nos lleve a la base deseada. Lang ha encontrado una condición necesaria y suficiente para la existencia de un tal mapa de cicatrices, tal y como se enuncia en el siguiente (ver [Lang2]):

Teorema (del árbol de Lang). Sea un árbol T simplemente conexo con puntos terminales $P1,..., Pn$, y sean l_{ij} las distancias entre Pi y Pj medidas a lo largo de las aristas del árbol. Sea un conjunto de puntos u_i en el cuadrado unidad. Entonces, la condición necesaria y suficiente para que exista un mapa de cicatrices que transforme el cuadrado en una base cuya proyección sea el árbol T es:

$$\left|u_i - u_j\right| < l_{ij} \quad \forall i, j\,.$$

Más aún, en dicha base cada punto Pi es la proyección del punto u_i para todo i.

De la prueba se desprende una manera de construir un algoritmo que calcule el mapa de cicatrices deseado. El autor ha implementado el algoritmo en un programa de ordenador, el Treemaker, de libre distribución (ver [Lang2]).

De todos estos métodos matemáticos de creación a partir del mapa de cicatrices, por supuesto, se derivan problemas adicionales. El primero es obtener mediante dobleces los ángulos que proporciona el método. El segundo consiste en que, aun obteniendo un mapa de cicatrices, encontrar una secuencia de plegado elegante que nos lleve hasta la figura deseada es realmente complejo. No todo en papiroflexia se basa en métodos matemáticos; la experiencia y la componente artística no se pueden dejar de lado.

BIBLIOGRAFÍA

[AEP] *Asociación Española de Papiroflexia,* http://www.pajarita.org.

[Alp] ALPERIN RC. «A mathematical theory of origami constructions and numbers». *New York J. Math* 6, 119-133, 2000.

[Div] *Papiroflexia y matemáticas (portal DivulgaMAT),* http://www.divulgamat.net/weborriak/Cultura/ papiroflexia/index.asp.

[Hull1] HULL T. *Página web de Tom Hull*, http://web.merrimack.edu/~thull.

[Hull2] HULL T. «On the mathematics of flat origamis». *Congressus Numerantium* 100, 215-224, 1994.

[Hull3] HULL T. «A note on 'impossible' paper folding». *American Mathematical Monthly* 103, 240-241, 1996.

[Hull4] HULL T. *Project Origami.* AK Peters, 2006.

[Kasa] KASAHARA K Y TAKAHAMA T. *Origami para expertos.* Edaf, 1993, 2000.

[Kawa] KAWAHATA F. «The technique to fold free angles of formative art 'origami'». Proceedings of the Second International Meeting on Origami Science and Scientific Origami, Otsu, Japón, 1994.

[Lang1] LANG R. *Origami Design Secrets.* AK Peters, 2003.

[Lang2] LANG R. *Programa TreeMaker 5.0.1* [Disponible en la página de Robert Lang: http://www.langorigami.com/science/treemaker].

[Row] ROW S. *Geometric Exercises in Paper Folding.* Dover, 1966.

[SAG] SIMON L, ARNSTEIN B Y GURKEWITZ R. *Modular Origami Polyhedra.* Dover, 1999.

[Voy] VOYER JA. *Introducción a la Creación: seres de ficción, el lado oscuro de la papiroflexia.* Salvatella, 2000.