sctm06
sociedad, ciencia, tecnología y matemáticas 2006

# La papiroflexia como herramienta en el estudio de las matemáticas

Covadonga Blanco García* y Teresa Otero Suárez**
*Universidad de La Coruña
**IES Antonio Fraguas, Santiago de Compostela

## INTRODUCCIÓN

La papiroflexia nació en oriente a principios de nuestra Era y originalmente estaba reservada a la nobleza y a los samurais japoneses.

La difusión, primero en Europa y posteriormente en América, fue lenta y gracias a los contactos comerciales, tomando un nuevo impulso en el siglo XIX.

Actualmente se ha comenzado a estudiar más sistemáticamente la papiroflexia como medio de representación de objetos matemáticos, particularmente, objetos geométricos. Por ejemplo, se ha estudiado la relación entre la papiroflexia y la topología; la relación entre los poliedros hechos con origami y las geodésicas (estructuras basadas en los diseños de Buckminster Fuller); se han formulado listas de axiomas para la papiroflexia; el físico Jun Maekawa ha descubierto teoremas relacionados con la papiroflexia, usándolos para diseñar modelos; el matemático Toshikazu Kawasaki ha estudiado teoremas de la papiroflexia en cuatro dimensiones; Robert Lang, de California, ha desarrollado una manera de algoritmizar el proceso de diseño para usar una computadora en la invención de modelos complejos; el educador Shuzo Fujimoto y el artista Chris Palmer han descubierto un paralelismo entre la papiroflexia y los teselados; Peter Engel ha relacionado la papiroflexia con la teoría del caos, en particular con los fractales; el matemático Roger Alperin ha establecido una relación entre las construcciones de papiroflexia y los números llamados «números construibles»...

La papiroflexia ayuda y realiza conexiones con muy distintas asignaturas, pero su mayor contacto es con las matemáticas y particularmente con la geometría como se ha indicado en el párrafo anterior. Si se emplea un método con poca manipulación de objetos y procesos matemáticos, no se puede lograr el objetivo de que el niño aprenda correctamente la figura y el concepto; los efectos de la enseñanza memorística y repetitiva en los primeros niveles y sus consecuencias serían la adquisición de conceptos limitados o erróneos y el desinterés de los estudiantes a mediano y largo plazo.

Según Clements y Sarama, dos investigadores que desarrollan aplicaciones computacionales para la enseñanza y aprendizaje de la geometría y el temprano desarrollo de ideas matemáticas, niñas y niños pasan por varias etapas en su conocimiento de las figuras geométricas. En el primer estadio, el precognitivo, niños y niñas perciben las

formas pero son incapaces de distinguirlas y clasificarlas. En el siguiente, la etapa visual, son capaces de identificarlas de acuerdo a su apariencia. Por ejemplo identifican un rectángulo «... porque se parece a una ventana». No es sino hasta después, en la etapa descriptiva, en la que aprenden a reconocer y caracterizar las formas, basándose en sus propiedades. Es entonces, una vez asimilados los conceptos y no sólo repitiendo una serie de palabras, cuando reconocen y describen conscientemente un rectángulo como una forma que tiene dos lados iguales y cuatro ángulos rectos.

Se puede alcanzar este nivel de pensamiento en los años escolares intermedios, pero algunos no lo logran hasta mucho después y otros nunca lo adquieren. Esto depende mucho del tipo de enseñanza que han recibido y de sus otras experiencias y aprendizajes obtenidos fuera del aula.

Para impulsar el aprendizaje, las corrientes pedagógicas avanzadas sugieren técnicas de trabajo complementarias, como las siguientes:

- El acercamiento a los temas desde diferentes disciplinas.
- La manipulación y transformación física y virtual de objetos.
- El establecimiento de conexiones entre el conocimiento previo, los nuevos conceptos y la vida diaria de los estudiantes.
- El trabajo en grupos que promueva el debate de ideas, la clarificación de conceptos, el desarrollo de estrategias individuales y colectivas, y la presentación de resultados ante sus compañeros.
- La repetida práctica de solución de problemas (en diferentes escenarios), en los que se utilicen destrezas, conceptos o procesos matemáticos.

Teniendo en cuenta lo expuesto anteriormente, es bastante claro el importante papel que puede tener la papiroflexia en la enseñanza de las matemáticas. Podemos resumir sus ventajas en el aula con la siguiente enumeración.

## MÉTODO

La papiroflexia es un ejemplo de aprendizaje esquemático a partir de la repetición de determinados movimientos. Es una forma de aprender en la que el éxito y el logro de objetivos lo obtiene el estudiante por sí mismo y el profesor tiene únicamente el papel de guía, lo que proporciona al alumno una independencia en el aprendizaje, faceta deficitaria en el sistema de educación actual basado en una tutorización excesiva. Por otra parte, se logra una mejora de la autoestima, principalmente en aquellos alumnos que obtienen malos resultados en matemáticas y otras disciplinas.

## APRENDIZAJE COOPERATIVO

Si se trabaja en una clase de matemáticas utilizando el recurso de la papiroflexia se logra un aprendizaje cooperativo entre todo el grupo que difícilmente se consigue de otra manera. El estatus asociado a la diferencia de edad o de conocimientos en otras materias, se elimina. El propio alumno se convierte en profesor de sus compañeros y el trabajo en equipo surge de manera espontánea.

ENLACE CON LAS MATEMÁTICAS

La transformación de una hoja de papel en una figura de papiroflexia tri-dimensional es un ejercicio único para el razonamiento espacial. También es muy útil en el aprendizaje de las simetrías, pues muchas figuras requieren de la realización de piezas simétricas y el error en la realización de los módulos conduce a la imposibilidad de montaje de la figura. Doblando papel el estudiante crea y manipula conceptos geométricos elementales como cuadrados, rectángulos, triángulos y polígonos en general; e incorpora el lenguaje matemático a sus conocimientos de manera natural, con lo cual realiza la abstracción de determinados elementos como diagonal, mediana, vértice, bisectriz, etc. sin el prejuicio de considerar aquello «matemáticas» que una vez sale del aula no va a necesitar ni a utilizar para nada.

MULTICULTURALIDAD

Finalmente, el origami refleja la ingenuidad y estética de la cultura japonesa, por lo que también proporciona una apreciación de las distintas culturas y un acercamiento a distintas formas de vida, aumentando la tolerancia y la flexibilidad de pensamiento.

Pero la papiroflexia es un medio, no un fin y cuando se utiliza en el estudio de las matemáticas es importante cuestionarse, estudiar propiedades, observar, analizar y conjeturar, a partir de la manipulación del papel.

## OBJETIVO DEL TALLER

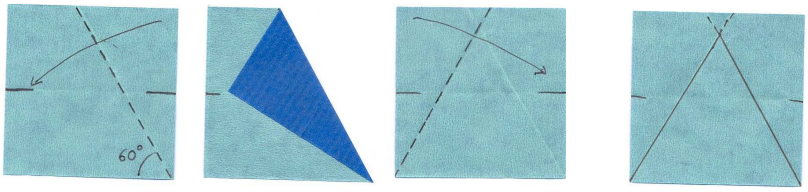
El objetivo del taller es proporcionar a los docentes una herramienta didáctica para el estudio de la geometría, particularmente de los polígonos, de una manera accesible y amena, lo cual permite abordar este tema que rara vez se toca en los niveles de secundaria y bachillerato. Introduciremos también algunos modelos en tres dimensiones realizados a partir de los polígonos previamente construidos. Las superficies regladas, y en concreto el paraboloide hiperbólico, así como figuras geométricas con movimiento completarán el taller.

## DESARROLLO DEL TALLER

TRIÁNGULO

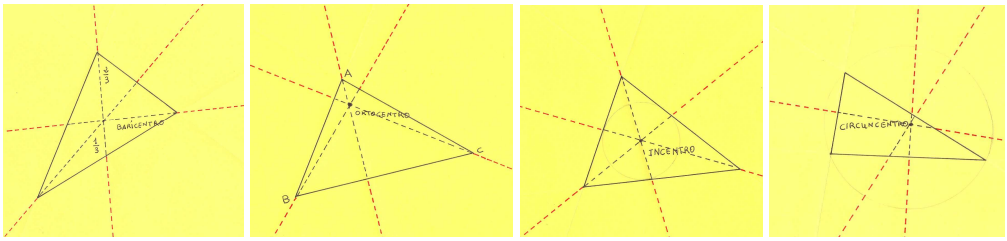
*Triángulo equilátero*

Veamos cómo se construye un triángulo equilátero partiendo de un cuadrado. Hay muchas maneras distintas de hacerlo utilizando la papiroflexia. A continuación exponemos una de ellas en las que se obtiene el triángulo equilátero de mayor área posible:



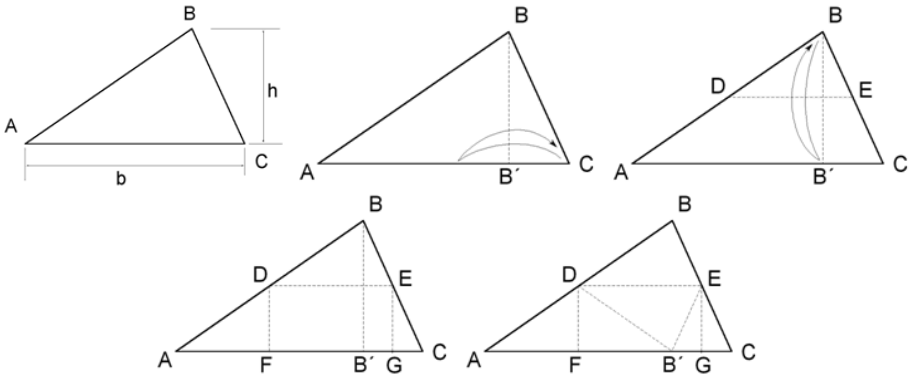

*Estudio de los elementos de un triángulo doblando papel*

*Baricentro:* Punto de corte de las medianas. Centro de gravedad del triángulo.
*Ortocentro:* Punto de corte de las alturas.
*Incentro:* Punto de corte de las bisectrices.
*Circuncentro:* Punto de corte de las mediatrices.

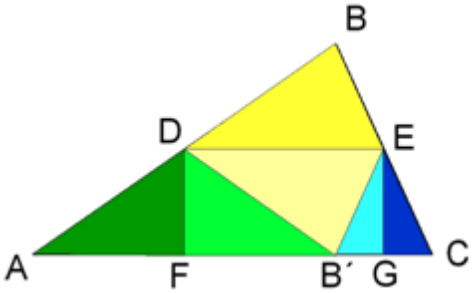



*Área del triángulo*

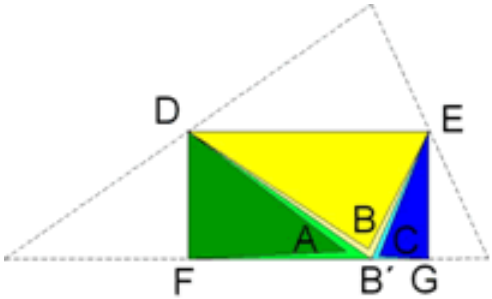
Consideremos un triángulo cualquiera de base b y altura h.




Coloreamos los triángulos parciales obtenidos en los pasos anteriores:



- Los triángulos DBE y DB'E son idénticos. Lo comprobamos doblando uno sobre otro por la línea DE.
- Los triángulos ADF y B'DF son idénticos. Doblamos por la línea DF y lo comprobamos.
- Doblamos por la línea EG y comprobamos que los triángulos CEG y B'EG son idénticos.

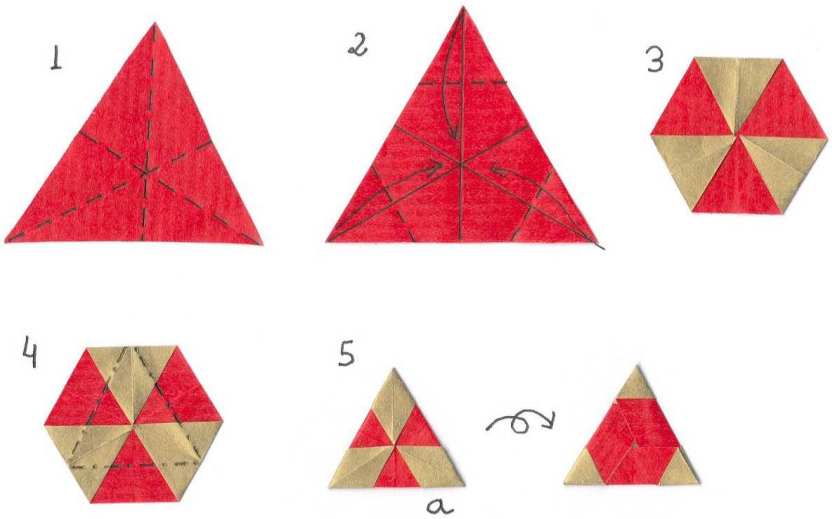



Los vértices A, B y C, coinciden exactamente en el punto B'; por tanto, como el área del triángulo del que partimos es igual a la suma de las áreas de todos los triángulos en que lo hemos dividido, deducimos que el área del triángulo es igual a dos veces el área del rectángulo FDEG.

La altura de este rectángulo es $\frac{h}{2}$ y su base $\frac{b}{2}$, luego su área es $A_{\text{rectangulo}} = \frac{b}{2} \cdot \frac{h}{2}$, y teniendo en cuenta lo dicho anteriormente: $A_{\text{triangulo}} = \frac{b \cdot h}{2}$.

*Estrella con dos triángulos equiláteros*

Partimos de un triángulo equilátero (vamos a necesitar dos módulos iguales).



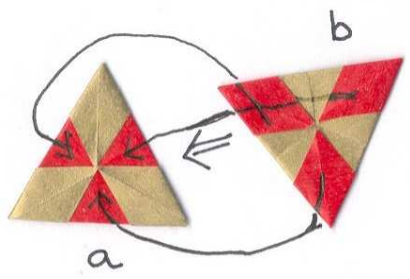
1 Se trazan las bisectrices, medianas, alturas y mediatrices del triángulo (pliegue en valle) que por tratarse de un triángulo equilátero coinciden. Su intersección nos da el incentro, baricento, ortocentro y circuncentro (mismo punto).

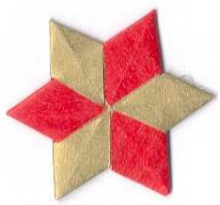
2 y 3 Al doblar (valle) las puntas al centro obtenemos un hexágono.

4 y 5 Doblamos de nuevo (montaña) y obtenemos de nuevo un triángulo equilátero de área una cuarta parte del triángulo del que partimos.

Ahora construimos otra pieza igual y la superponemos. Las trabamos por las solapas obtenidas para conseguir una estrella de 6 puntas.

Si hacemos las piezas de dos colores distintos obtenemos una estrella con tres puntas de cada color.



DODECAEDRO RÓMBICO

*Calendario*

Un dodecaedro muy interesante a pesar de no ser regular es el dodecaedro rómbico. El dodecaedro rómbico ya era conocido en el antiguo oriente; de hecho, los cristales de granate, y en particular el Almandino, crecen en dodecaedros rómbicos. Pero se considera a Kepler como su descubridor, aunque algunos historiadores opinan que Paccioli ya lo conocía.

El *dodecaedro rómbico* es un poliedro convexo con 12 caras uniformes que son rombos (la diagonal más larga del rombo que forma sus caras es $\sqrt{2}$ veces la longitud de la diagonal menor), y 14 vértices que no son uniformes.

Esta propiedad se apreciará muy bien en la construcción que vamos a hacer a continuación, en la que distinguiremos dos tipos de vértices:

- 6 de orden 4 (4 caras, ángulos agudos),
- 8 de orden 3 (3 caras, ángulos obtusos).

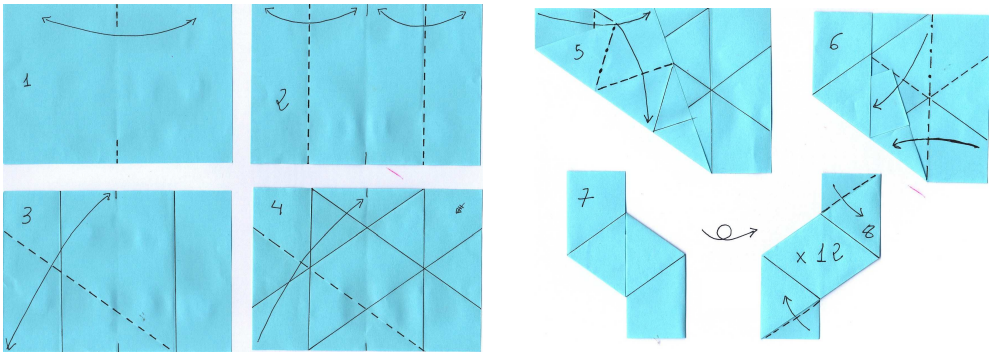
Otra de sus características es que se trata de un poliedro de aristas uniformes, es decir, que todas sus aristas reúnen un mismo par de caras.

Pertenece al grupo de los llamados *sólidos de Catalan* que son una familia de poliedros que se generan con el dual de los sólidos de Arquímedes. Fueron nombrados así por el matemático belga Eugène Charles Catalan, que los estudió en 1865.

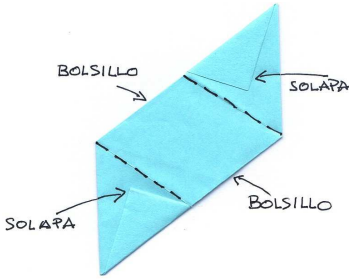
El dodecaedro rómbico tiene además la característica de llenar completamente el espacio cuando juntamos varios de ellos. Las condiciones que debe cumplir un poliedro para que esto se verifique son: que tenga aristas de la misma medida, que tenga algún tipo

de cara igual y que tenga ángulos diedros susceptibles de combinarse para sumar 360º. Nuestro poliedro verifica todas ellas.

La unidad rómbica de la que damos los diagramas a continuación fue diseñada por Nick Robinson. Se parte de un papel rectangular con la proporción DIN A. Con 12 módulos se obtiene el dodecaedro cuyas caras son rombos.



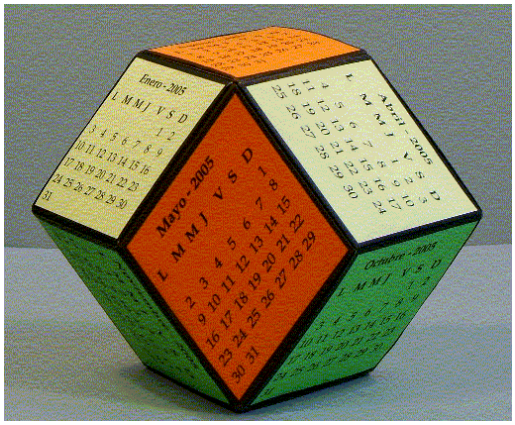

Una vez tenemos doblados los 12 módulos para su ensamblaje hay que tener en cuenta que:




y lo que se dijo anteriormente respecto a los dos tipos de vértices:

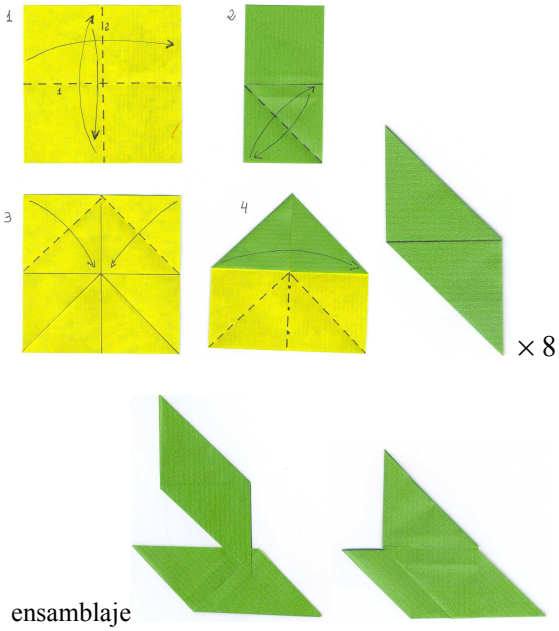
- 6 de orden 4 (4 caras, ángulos agudos),
- 8 de orden 3 (3 caras, ángulos obtusos).

La idea de utilizar este dodecaedro como calendario partió de Humiaki Huzita.



ESTRELLA–OCTÓGONO CON MOVIMIENTO

Se trata de una pieza modular. En su realización vamos a utilizar 8 piezas iguales. El papel es cuadrado.




CALEIDOCICLOS

El término proviene del griego *kalós* (bellos) + *eîdos* (figura) + *kŷklos* (anillo).

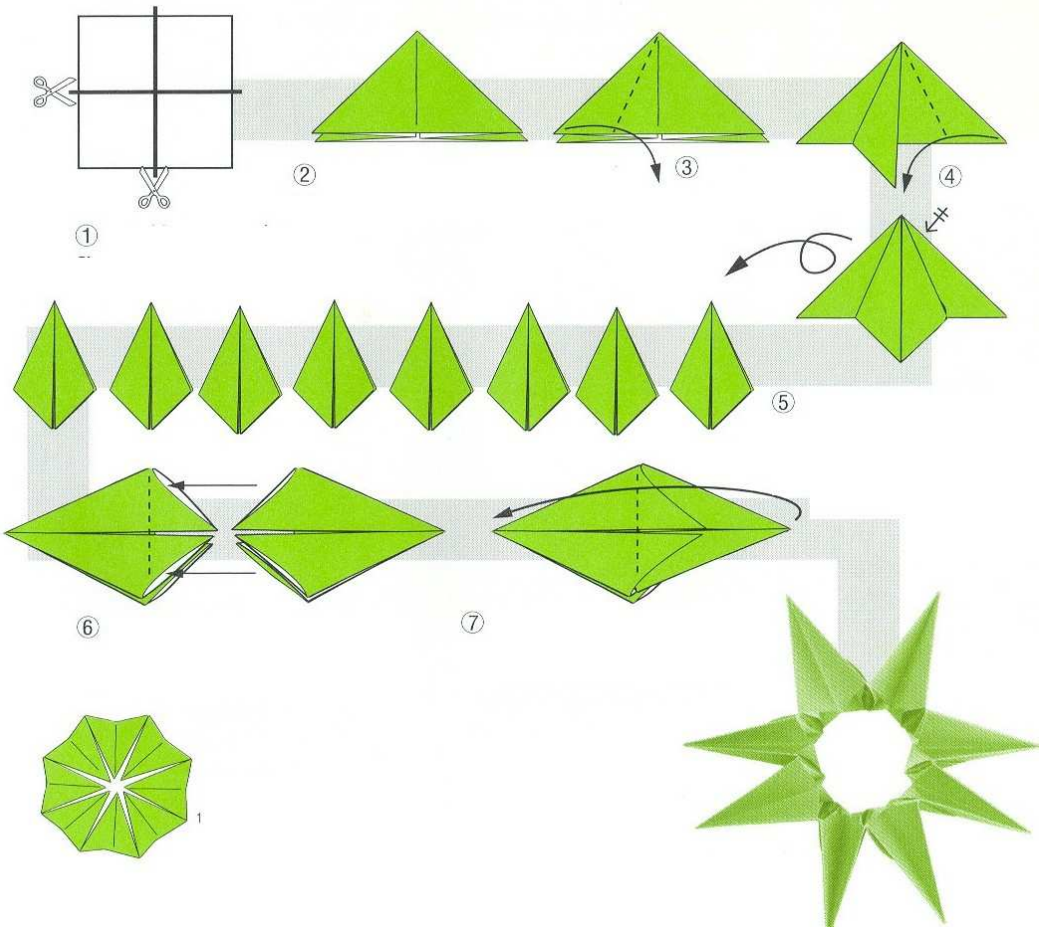
Los *caleidociclos* son anillos tridimensionales compuestos por pirámides unidas por sus aristas. Pueden girar sobre sí mismos infinitas veces sin romperse ni deformarse en torno a su centro.

Es muy sencillo construir caleidociclos, ya que su desarrollo es plano y extremadamente simple.

Los ejemplos más conocidos de caleidociclos son aquellos compuestos por tetraedros y en particular los modelos de Escher. Los caleidociclos son unas figuras bellas y fascinantes. Además de su belleza intrínseca, se prestan a ser decorados de diversas maneras. En el libro *M.C. Escher: Caleidociclos*, de Doris Schattschneider y Wallace Walker (editorial Taschen) se encuentran modelos para construir diez caleidociclos, además de otros seis sólidos, decorados con teselaciones del artista holandés M. C. Escher.

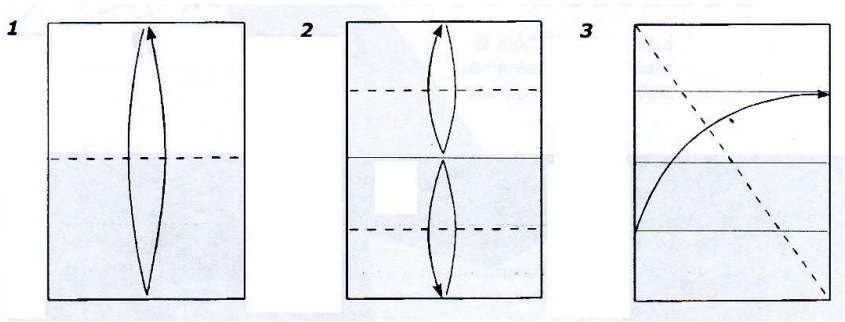
*Caleidociclo de 8 módulos*

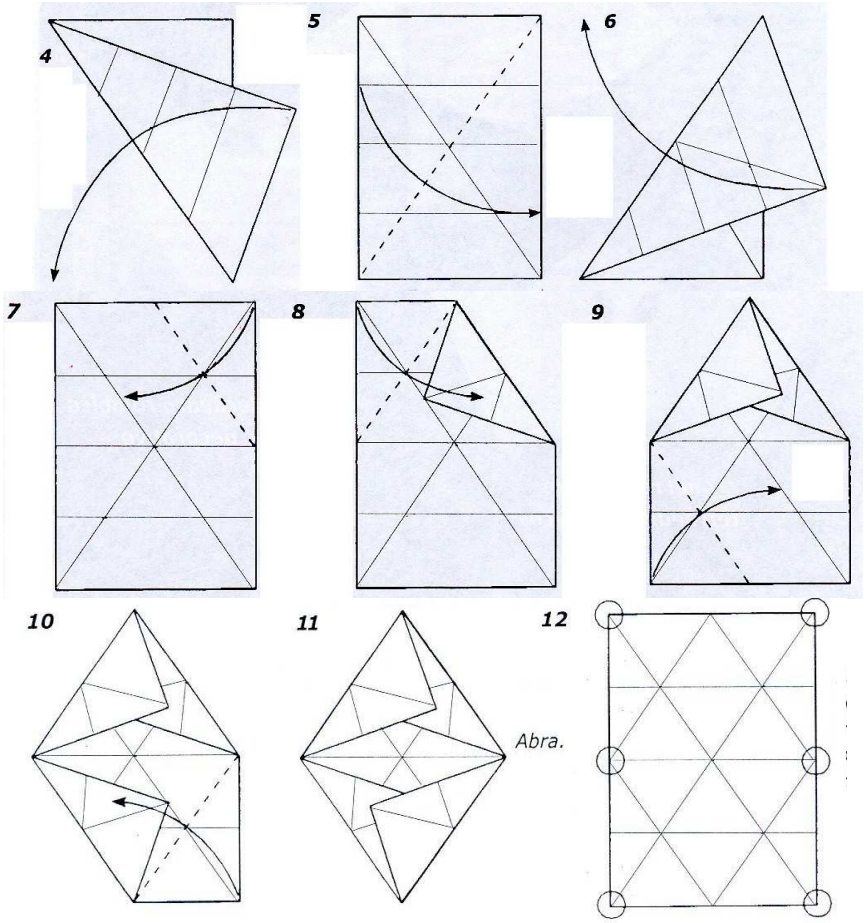
El caleidociclo que vamos a construir es modular. Necesitaremos 8 módulos iguales que van a ser pirámides de base cuadrada y una vez unidos nos permitirán el movimiento que caracteriza a estas figuras.



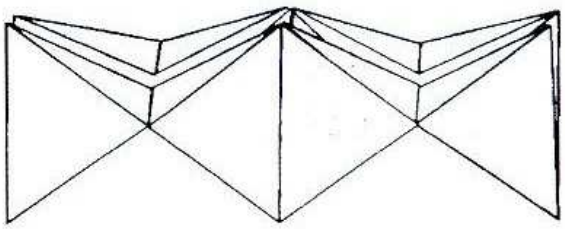

*Anillo rotativo de tetraedros rómbicos*

Partimos para su realización de papel rectangular en la proporción DIN A. Necesitaremos 4 módulos iguales. En el paso 2 se da la vuelta al papel.

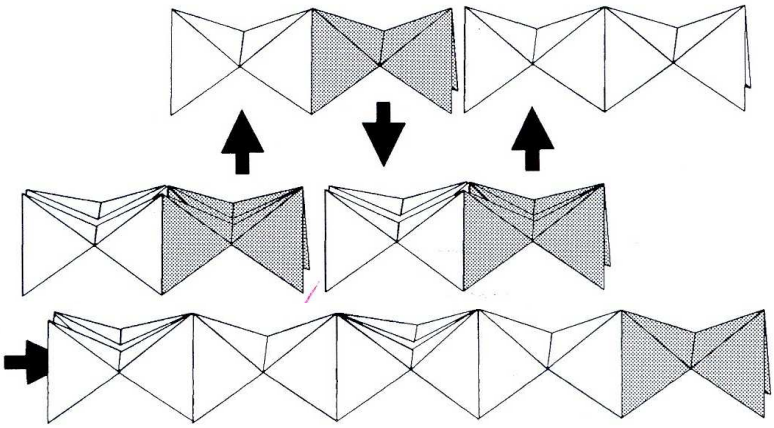





Si se juntan los puntos señalados con el círculo de cada lado de la hoja se obtiene la siguiente pieza:



Se hacen 4 piezas iguales y se unen de la siguiente manera:



PARABOLOIDE HIPERBÓLICO

Un *paraboloide hiperbólico* se puede definir como una superficie reglada engendrada por rectas:

*Opción* 1: cruzándose dos rectas no coplanarias que quedan paralelas a un plano fijo (secante a los de las rectas).
*Opción* 2: cruzándose tres rectas no coplanarias dos a dos, paralelas a un plano fijo.

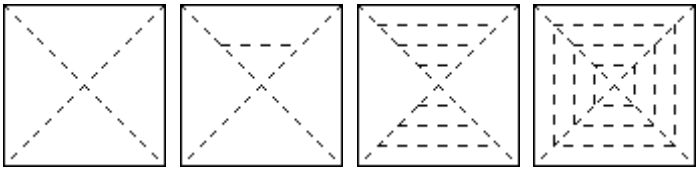
Se puede también definir un paraboloide hiperbólico como el conjunto de rectas ($MN$), desplazándose los puntos $M$ y $N$ a velocidad constante sobre dos rectas no coplanarias.

El paraboloide hiperbólico no es por tanto una superficie de revolución (generada a partir del giro de una curva en torno a un eje), sino una superficie reglada, lo cual convierte a está superficie en óptima candidata para ser construida con un trozo de papel.

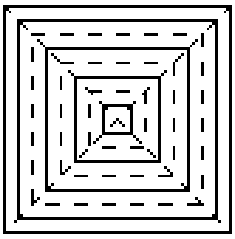
Recibe también el nombre de silla de montar o silla del caballo por su particular forma.

Hay varios creadores que han diseñado los diagramas para esta realización pero no está muy claro cual es el origen de las distintas versiones, pues todos los autores nos remiten a modelos anteriores. A continuación explicamos el modelo que nos presenta Paul Jackson en su libro *The Complete Origami Course*.

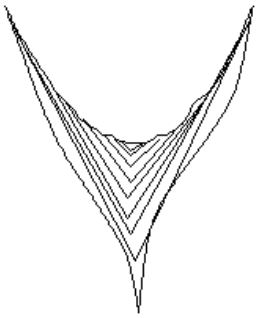
Partimos de una hoja de papel cuadrado:



Se da la vuelta al papel para los últimos dobleces:

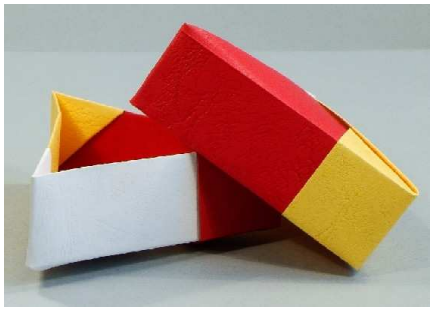


Y finalmente se pliega para obtener:



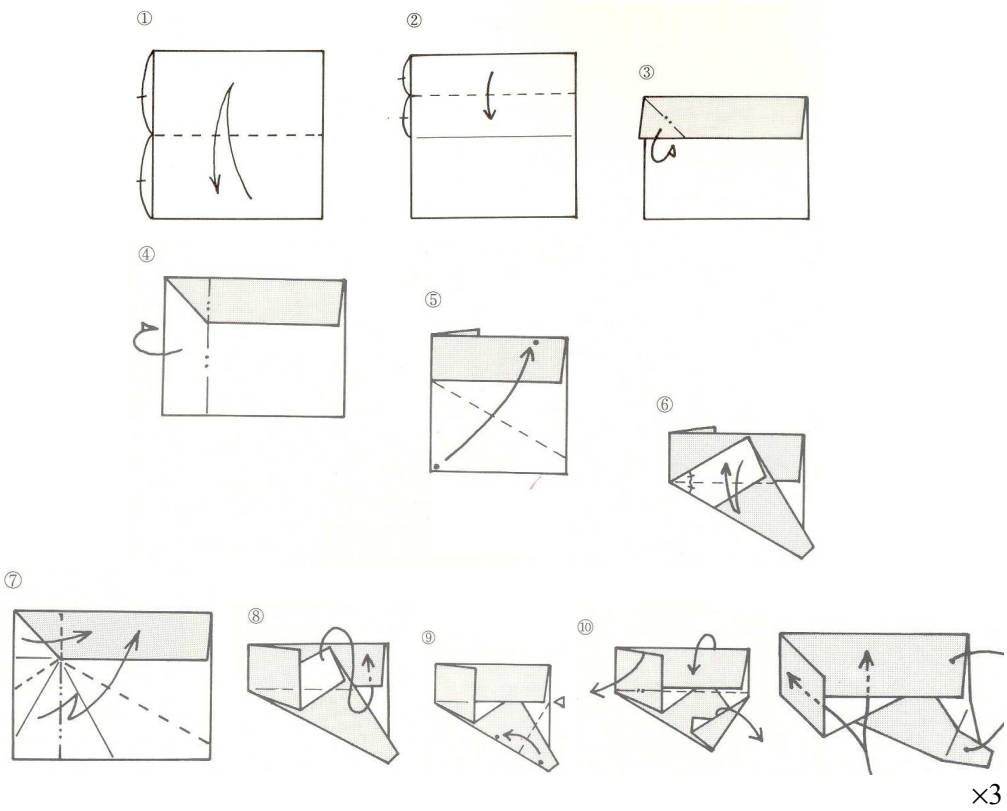
CAJA TRIANGULAR

Las cajas constituyen un apartado importante en el universo de la papiroflexia; para reforzar el concepto de polígono: cuadrado, triángulo, pentágono, hexágono, etc. resulta muy motivadora la construcción de cajas de distintas formas. Los dobleces necesarios para conseguir el ángulo adecuado en cada caso nos llevan a un interesante estudio y a un campo para la investigación por parte del alumno de cómo conseguir el objetivo que se pretende.

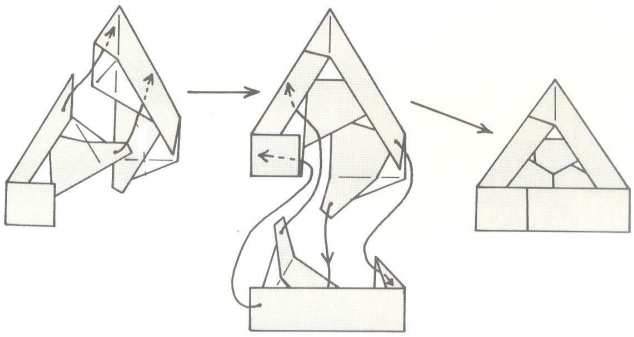


Realizaremos la *caja triángulo equilátero* que es una creación de Tomoko Fusè. En su construcción es interesante fijarse con detenimiento en algunos de los pasos intermedios que nos conducen a la construcción del ángulo de 60º y por lo tanto a la obtención de una de las esquinas de la caja.

La tapa se construye de la misma forma y si se trabaja con tres colores distintos en la realización de la base, una construcción simétrica en el doblado de la tapa nos lleva a la «coincidencia de color».




El método de unión es el que sigue:



BIBLIOGRAFÍA

ANDERSEN EM. *Origami & Math,* http://www.paperfolding.com/math/index.php.

CAFFERATA FERRI S Y RUBÉN MAMANI G. *Mosaicos o Teselados,* http://www.geocities.com/teselados/?200625#enseñanza.

FUSÉ T. *Origami Boxes*. Chikuma shobo, 2000.

KASAHARA K Y TAKAHAMA T. *Papiroflexia para Expertos*. Edaf, 1993, 2000.

LUCIO R Y SPÜTZ J. *Das grobe Origamibuch*. Urania Verlag , 2003.

MITCHELL D. *Origami Matemáticos*. Replicaçao, 2001.

*The Uniform Polyhedra,* http://www.mathconsult.ch/showroom/unipoly/index.html.

ROYO PRIETO JI. «Matemáticas y Papiroflexia». *SIGMA* 21, 175-192, 2002.

ROYO PRIETO JI. «Matemáticas, papiroflexia y balones de fútbol». En *Un paseo por la Geometría 2001/02*. Departamento de. Matemáticas UPV, 45-67, 2002. [Disponible en http://www.divulgamat.es/weborriak/TestuakOnLine/paseoGeometria.asp#a0102].