

Geometría fractal: el diseño de la Naturaleza

Aniceto Murillo Mas
Universidad de Málaga

Antes de una lectura detenida de este texto, si esa es la intención del lector, le invito a contemplar alguna de las imágenes que aparecen como figura 1, 2 y 3 en la página siguiente... Es fácilmente apreciable, además de su indudable belleza, su semejanza con estructuras naturales con las que habitualmente nos tropezamos.

Sin embargo, todas ellas son producto de «matemáticas experimentales» (que no aplicadas) o, dicho de otro modo, han sido confeccionadas sin salir del laboratorio matemático cuyo material es, esencialmente, un ordenador y algunos conceptos matemáticos sabiamente utilizados. Es, podríamos decir, una forma de hacer geometría que describe ciertos fenómenos naturales de forma más fidedigna de la que los tratados clásicos nos tienen acostumbrados. En efecto, la geometría clásica, digamos euclídea, constituyó una primera aproximación a la estructura de objetos físicos, naturales, y si estos son más o menos regulares, la geometría diferencial ofrece de hecho una excelente aproximación a tales objetos. No obstante, modelizar las complicadas e irregulares estructuras que de hecho aparecen en nuestro entorno resulta mucho más complicado con estas técnicas, si acaso posible.

La geometría fractal ocupa en cierta medida este vacío y puede usarse para diseñar fielmente desde la intrincada silueta de una simple hoja hasta la evolución del árbol al que pertenece. Parafraseando a Michael Barnsley¹, la geometría fractal es un nuevo idioma que, una vez aprendido, nos permitirá describir la caprichosa forma de una masa nubosa tan precisamente como un arquitecto describe en sus planos la casa a construir. Es, en palabras de Benoît Mandelbrot², la geometría de la Naturaleza.

Por otra parte, es conocido cómo la geometría fractal gana adeptos por su aplicabilidad a cada vez más ramas de distintas ciencias. Sin embargo, no es menos cierto que los principios matemáticos sobre los que se asienta pasan desapercibidos a la mayoría de sus usuarios. Quisiéramos aquí, por tanto, ofrecer de forma intuitiva y aun rigurosa, el componente matemático que subyace en el concepto de fractal, y cuyo conocimiento, además del placer que proporciona a la mente científica la respuesta a misterios no

¹ Michael Barnsley (Inglaterra, 1948) es actualmente profesor en la Universidad Nacional de Australia. Ha publicado, entre otros, importantes artículos de base en geometría fractal y es fundador de varias compañías de software relacionadas con compresión fractal.

² Benoît Mandelbrot (Polonia, 1924) es Profesor Sterling de Ciencias Matemáticas en la Universidad de Yale y Socio Emérito de IBM. Es el precursor de la geometría fractal, su representación gráfica y sus aplicaciones en otras ciencias.

resueltos, redundará sin duda en la apertura de nuevos horizontes donde hacer uso de esta materia.



Figura 1.



Figura 2.



Figura 3.

Comencemos por observar que si pretendemos describir fenómenos naturales no podemos contentarnos con su contemplación como simples imágenes, estructuras estáticas. En efecto, cualquier modelo geométrico de una planta que no lleve incorporado de alguna forma su crecimiento dinámico no será para el científico totalmente satisfactorio. Lo mismo puede aplicarse al depósito de zinc en un proceso electrolítico, la formación de cordilleras, la descripción de un proceso tumoral...

En otras palabras, tratar de comprender el concepto de fractal ignorando el proceso dinámico que lo crea no es adecuado. Además, sorprendentemente, y al contrario de lo que a menudo la experiencia nos hace inferir, en la geometría fractal el proceso responsable de un intrincado y complejo fenómeno puede ser sorprendentemente simple. También en este caso, el recíproco es cierto: la simplicidad de un proceso no debe llevarnos a desdeñar sus posibles consecuencias, que a menudo pueden ser altamente complejas.

La geometría fractal tiene su origen en el concepto de proceso iterativo introducido hace ya 300 años por Isaac Newton y Gottfried Leibniz y al que seguro estamos habituados. De forma esquemática, un proceso iterativo consta de una unidad de entrada compuesta por un dato inicial. Esta unidad de entrada alimenta la unidad de proceso, cerebro pensante del proceso iterativo, que manipula la información recibida y

produce un nuevo dato que constituye la unidad de salida. Este nuevo dato será posteriormente utilizado por la unidad de entrada para volver a alimentar la unidad de proceso, y así sucesivamente (figura 4).

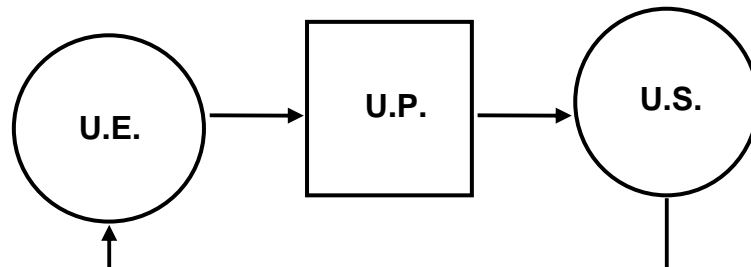


Figura 4.

Aunque seguramente, en esta era de la informática que nos ha tocado vivir, todos estamos acostumbrados a este tipo de procesos cuyo ejemplo típico es el primitivo concepto algorítmico de lazo o bucle, existen otros procesos iterativos, más «artesanos» o «creativos», permítaseme la licencia, uno de los cuales constituye nuestro punto de partida para la definición de fractal. Es la *fotocopiadora reductora múltiple* que ahora les presento.

La unidad de entrada de este proceso iterativo lo constituye una hoja de papel que contiene la imagen a fotocopiar. La unidad de proceso está formada por una fotocopiadora algo particular: reduce la imagen a fotocopiar y la dispone por triplicado tal como indica la siguiente ilustración. Por último, la unidad de salida la compone la fotocopia así obtenida que, para continuar con el proceso iterativo, será usada como unidad de entrada para volver a ser fotocopiada...

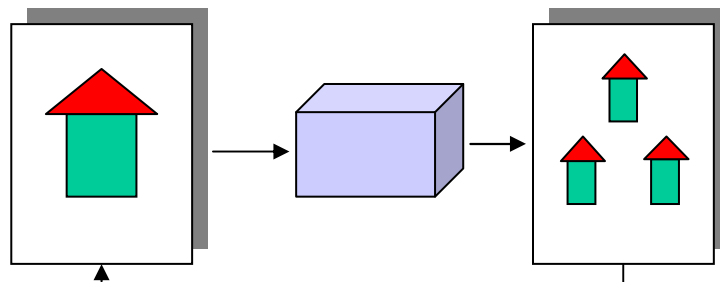


Figura 5.

Bien, tomemos entonces una circunferencia como entrada inicial de este proceso iterativo y pongámoslo en funcionamiento. El resultado de las distintas iteraciones es el que aparece en la figura 6:

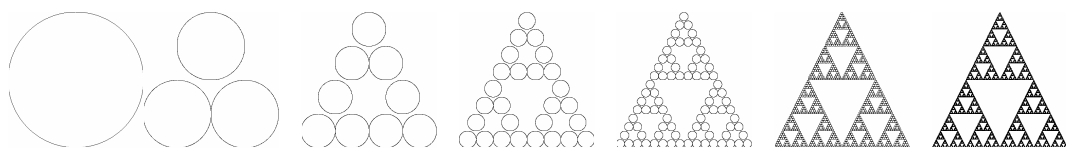


Figura 6.

Observamos además que después de un número suficiente de iteraciones el resultado obtenido es prácticamente el mismo, que por cierto responde a un animal matemático con nombre propio, el *Triángulo de Sierpinski*³. También es tan sorprendente como fácilmente comprobable que tomando una imagen inicial distinta, el resultado «final» es el mismo.

Tomemos ahora una fotocopidora reductora múltiple algo más sofisticada. Esta vez tiene cuatro lentes que disponen la copia de la imagen reducida y distorsionada tal y como detallamos en la figura 7:

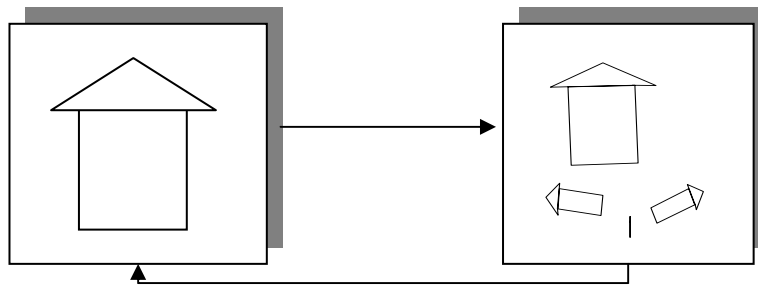


Figura 7.

Comencemos el proceso iterativo con un triángulo como imagen inicial. La sucesión de iteraciones de este proceso es la que se muestra en la figura 8 y cuyo resultado «final» esta vez es el *Helecho de Barnsley*. Esto, queridos lectores, ya no constituye una complicada y patológica estructura matemática sino que corresponde a algo «natural» en el sentido más familiar y más formal también del término.

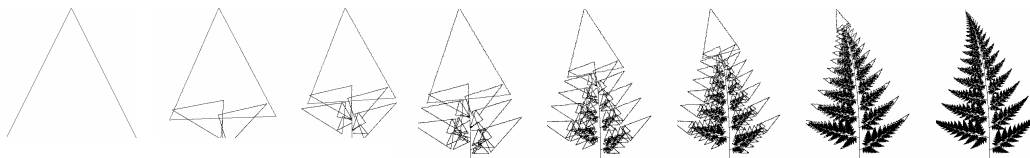


Figura 8.

Una vez estudiados estos ejemplos, saltan a la vista dos propiedades sorprendentes, mágicas podríamos decir. Por un lado, son misteriosamente estables, esto es, al repetirlos una y otra vez, el proceso parece converger a una imagen invariante por el mismo. Por otro, el resultado final de ambos procesos parece no depender del dibujo inicial. Quitemos el halo de misterio y preguntémosnos por los principios matemáticos que están detrás de estas propiedades. Para contestar a esta cuestión hemos de, en primer lugar, formalizar el concepto de fotocopidora reductora múltiple.

Teniendo en cuenta que la imagen inicial puede ser cualquiera que quepa en la hoja a fotocopiar, nuestra fotocopidora puede tomar como entrada cualquier conjunto compacto del plano euclídeo, al que denotamos por \mathbb{R}^2 . Para el lector no iniciado en los rudimentos de la topología, digamos que un compacto no es más que un trozo del plano

³ Waclaw Sierpinski (Polonia, 1882-1969) fue un excelente matemático con importantes contribuciones en teoría de conjuntos, topología general y teoría de números.

(o de cualquier otro espacio) que cabe en una porción finita del mismo y cuyos bordes pueden ser trazados sin ambigüedad. Denotemos por \mathcal{K} al conjunto de todas las posibles imágenes iniciales, esto es, de todos los compactos. El resultado de la fotocopia ha de ser una colección finita de imágenes distorsionadas y, lo que es esencial, reducidas, de la imagen inicial. Así, la traducción matemática de fotocopidora reductora múltiple puede ser formalizada en el concepto de *sistema de funciones iteradas* (SFI de aquí en adelante). Un SFI consiste en una aplicación

$$F: \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{K}$$

que asocia a cada compacto (imagen inicial) $A \in \mathcal{K}$, la imagen

$$F(A) = f_1(A) \cup f_2(A) \cup \dots \cup f_n(A),$$

donde cada $f_i : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ es una transformación contractiva, que reduce distancias. Comoquiera que esta propiedad es esencial, recordemos que, formalmente, una aplicación $f_i : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ es una transformación contractiva si para cualesquiera puntos $x, y \in \mathbb{R}^2$ y una cierta constante $r < 1$,

$$d(f(x), f(y)) < r \cdot d(x, y).$$

Aquí, $d(\cdot, \cdot)$ simplemente denota la distancia entre dos puntos dados. Recordemos asimismo una propiedad extremadamente interesante de las aplicaciones contractivas que posteriormente usaremos: el archiconocido en ambientes matemáticos *teorema del punto fijo*. Este resultado asegura que para cada transformación contractiva f existe un único punto fijo, esto es, un punto p_0 que es invariante por f , $f(p_0) = p_0$. Más que la demostración en sí de este resultado, nos interesa sobremanera el algoritmo tan sencillo que encuentra este punto fijo: elija el lector su punto favorito del plano p_1 y transfórmelo por f para obtener un nuevo punto $p_2 = f(p_1)$. Repítase este proceso una y otra vez para encontrar una sucesión de puntos p_1, p_2, p_3, \dots . Obsérvese entonces cómo tal sucesión se aproxima a un punto p_0 . Pues bien, ese es el punto fijo buscado.

Es conveniente dejar constancia que este resultado no es propiedad exclusiva del plano, sino que se verifica en cualquier conjunto donde podamos medir la distancia entre dos cualesquiera de sus puntos. Esto es lo que hizo Felix Hausdorff⁴ al definir una distancia en el conjunto de todas las posibles imágenes iniciales, es decir, en el conjunto \mathcal{K} de los compactos del plano.

Dado un elemento de ese conjunto $A \in \mathcal{K}$ y un número no negativo r , consideramos la nueva la imagen A_r como se indica en la figura 9, que está formado por

⁴ Tanto en la topología de espacios métricos como en teoría de conjuntos, Felix Hausdorff (Alemania, 1868-1942) ha dejado importantes resultados, clásicos hoy día. Junto con su esposa, judía como él, se suicidó justo antes de ser deportado a un campo de concentración.

todos los puntos del plano que distan de alguno de A menos que r . Pues bien, la distancia entre dos imágenes cualesquiera $A, B \in \mathcal{K}$ es el menor r tal que A está totalmente contenido en B_r y recíprocamente, B está totalmente contenido en A_r .

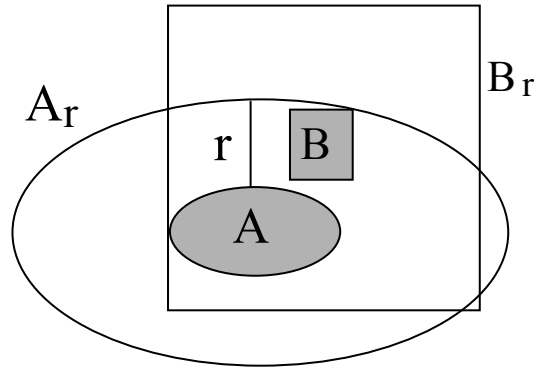


Figura 9.

Así las cosas, es fácil comprobar que un SFI es una transformación contractiva en el conjunto \mathcal{K} de las imágenes (compactos) con esta distancia tan ingeniosa que Hausdorff introdujo. Hacemos actuar ahora al teorema del punto fijo para garantizar la existencia de una única imagen invariable por la transformación. Esta imagen se obtiene además, como hemos dicho con anterioridad, transformando (fotocopiando) sucesivamente cualquier imagen inicial arbitrariamente tomada.

Pues bien, esa es nuestra definición de fractal que de paso desvela el misterio de la estabilidad e independencia de la imagen inicial de estas fotocopiadoras tan particulares. Un fractal es, pues, el compacto fijo, o imagen invariable, de un sistema de funciones iteradas. De forma general y en términos matemáticos, un fractal no es más que el punto fijo de una transformación contractiva en el espacio de compactos de un espacio métrico dado, con la distancia de Hausdorff.

En efecto, a poco que el lector reflexione sobre esta definición, observará sagazmente que todo lo hasta aquí expuesto puede ser trasladado del plano al espacio euclídeo de cualquier dimensión o, más generalmente, a cualquier espacio métrico. Así, una fotografía, un trozo del espacio-tiempo de la mecánica relativista, la superficie de una cadena montañosa, una canción, una masa nubosa, la disposición de los vasos capilares en un determinado tejido de nuestro cuerpo, pueden ser obtenidos como fractales en el espacio ambiente adecuado.

Obsérvese también cómo un determinado fractal puede ser intrincado, irregular, complejo, mientras que el sistema de funciones iteradas que lo genera y codifica es sorprendentemente simple. Otra cuestión, de respuesta nada trivial, es adivinar, en presencia de una imagen dada, el sistema de funciones iteradas que la genera.

Ya somos algo más felices por haber comprendido los cimientos matemáticos de la causa fractal, causa presente en distintos ámbitos científicos a la hora, por ejemplo, de clasificar objetos según su «fractalidad». Pero ¿cómo se mide tal característica? ¿Cómo asociar a cada imagen un número, un grado que dictamine cuán fractal es la imagen en cuestión? Igual que hay distintas escalas para medir la temperatura, también existen distintas medidas para clasificar los objetos de estudio en función de su «fractalidad».

Una de ellas, quizás no la más usada, pero sí geométrica e intuitiva y por la que podemos comenzar para abrir boca es la *dimensión de autosimilitud*. Como se aprecia en la ilustración que sigue, muchos objetos, y no necesariamente monstruos matemáticos, son *autosimilares*, es decir, están formados por trozos que son, a su vez, reducciones a escala del objeto inicial. La dimensión de autosimilitud se obtiene por la proporción existente entre el número de esos trozos que conforman el objeto en sí y el factor de reducción de cada uno de ellos. Formalmente, si un objeto autosimilar está formado por un número n de reducciones a escala $1/r$ del mismo objeto, definimos su dimensión de autosimilitud D por

$$D = \log n / \log r.$$

Obsérvese por ejemplo que el triángulo de Sierpinski está formado por tres reducciones a escala $1/2$ del propio triángulo, por lo que su dimensión fractal es $\log 3 / \log 2 = 1,548$.

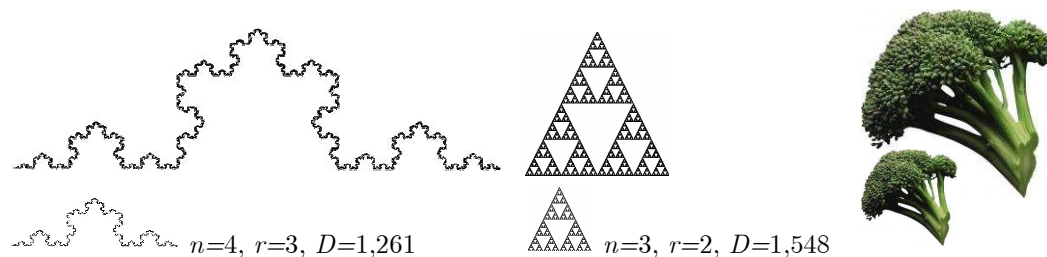


Figura 10.

Sin embargo, la naturaleza y los fenómenos que en ella se desarrollan no son tan regulares como los que aparecen en la figura 10. Afortunadamente, por lo que de interesante tiene la diversidad, no todo es autosimilar. ¿Cómo medir entonces la fractalidad en objetos nada regulares? Pues con la dimensión de Hausdorff, dimensión fractal por excelencia y que empíricamente puede calcularse como sigue.

Colocamos en primer lugar la estructura cuya fractalidad se quiere medir en una red de cuadrículas cuyos lados o aristas tengan longitud $1/s$. Por supuesto, las cuadrículas han de ser de la dimensión correspondiente, a saber: un papel cuadrulado si tratamos con una fotografía, un cubo dividido en cubículos si el objeto es tridimensional... Posteriormente, contamos el número de cuadrículas que contienen algún punto de nuestro objeto y lo denotamos por $N(s)$. Hacemos exactamente lo mismo con distintos niveles de precisión, esto es, variando el valor de s , y anotamos los valores obtenidos. Una vez efectuadas estas mediciones las disponemos en unos ejes coordenados en forma de puntos $(\log s, \log N(s))$, tal y como se indica en la figura 11. A esta nube de puntos le asociamos la recta que mejor se aproxime a la información obtenida. Por último, calculamos la pendiente de esa recta D y es precisamente ese valor al que denominamos *dimensión fractal* o *dimensión de Hausdorff* del objeto.

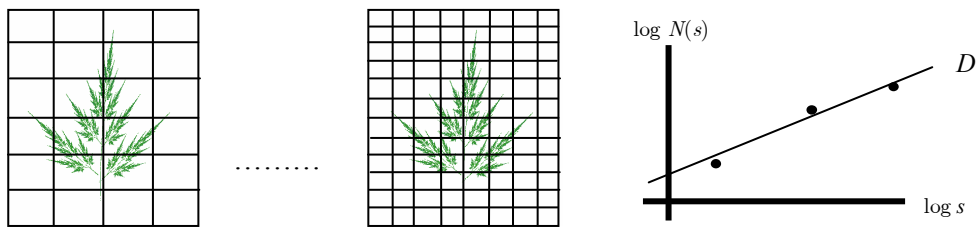


Figura 11.

Obsérvese que este grado de fractalidad no difiere de la dimensión euclídea o topológica clásica: si tomamos un cuadrado o un cubo y efectuamos el proceso anterior obtenemos como dimensión fractal 2 y 3 respectivamente, que son las dimensiones (las de verdad, las de toda la vida) del cuadrado y del cubo. Dicho de otra forma, cuanto más se aleje la dimensión fractal de un objeto de un número entero, más irregular, intrincada es su estructura.

Es más, si hacemos lo propio con el triángulo de Sierpinski, obtenemos que su dimensión fractal es precisamente $\log 3 / \log 2$. Así, en caso de que el objeto sea autosimilar, hay una muy buena probabilidad que su dimensión de autosimilitud coincida con su dimensión fractal o de Hausdorff.

Una vez que sabemos qué es un fractal, cómo encontrarlo, somos capaces de pensar en un determinado objeto como algo dinámico, como el proceso que lo determina, y sabemos clasificarlos según su fractalidad, quisiera finalizar dando a conocer, o sólo recordando si el lector es ya iniciado en esta materia, un fractal cautivador, en el que quedan reflejados las sorprendentes propiedades a las que puede dar lugar un sencillo proceso iterativo. Es, además, el fractal por excelencia: el conjunto de Mandelbrot.

Los orígenes de este fractal se remontan al año 1918, cuando Gaston Julia⁵ publicó su famoso artículo sobre el comportamiento dinámico de funciones racionales. En él se definen los conjuntos que ahora llevan su nombre y que, a simple vista, no parecen tan espectaculares. Consideremos el proceso iterativo generado por la siguiente transformación del plano \mathbb{R}^2 que depende únicamente de un punto $c \in \mathbb{R}^2$ fijado de antemano:

$$F_c : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad F_c(p) = p^2 + c.$$

Aquí, cuando escribimos p^2 estamos utilizando el producto de puntos del plano como números complejos que son. Si uno se siente algo incómodo utilizando esta notación puede reescribir F_c como sigue: si $c=(a,b)$ y $p=(x,y)$,

$$F_c(x,y) = (x^2 - y^2 + a, 2xy + b).$$

⁵ A consecuencia de las heridas sufridas en la 1ª. Guerra Mundial, Gaston Julia (Francia, 1893-1978) llevó a cabo en el hospital, y siendo muy joven, la mayor parte del famoso trabajo por el que se le conoce y por el que la Academia de Ciencias de Francia le galardonó.

Tras una corta reflexión se observa que esta transformación no es, sin embargo, contractiva, por lo que es impredecible el comportamiento de un determinado punto del plano a lo largo del proceso iterativo. Así, para cada punto c , se define el conjunto de Julia en c , J_c como el conjunto de puntos p del plano para los que al repetir el proceso iterativo se obtiene una sucesión de puntos acotada.

Veamos más de cerca estos conjuntos. Para $c=0$, J_0 no es nada misterioso. Es, como fácilmente se adivina, el círculo de radio 1 centrado en el origen. Sin embargo, para otros valores de c , el conjunto de Julia es totalmente diferente y «sumamente fractal», si se nos permite la expresión. La figura 12 muestra algunos ejemplos de tales conjuntos, todos ellos vestidos de riguroso negro:

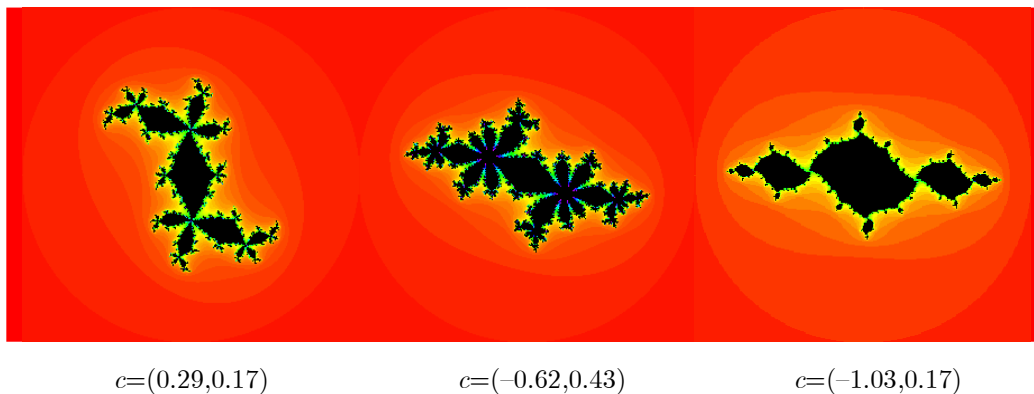


Figura 12.

Como decimos, estos conjuntos fueron la fuente de inspiración, algo tardía, de Mandelbrot. Aunque Benoît Mandelbrot nació en Polonia, se trasladó junto a su familia a Francia siendo aún niño, en 1936. En una familia de amplia tradición académica, fue su tío Szolem Mandelbrot, profesor en el prestigioso Collège de France de París, quien le recomendó, a mediados de los años 40, la lectura de los trabajos de Julia, que en un principio no fueron de su agrado.

Sin embargo, a finales de los 70, Mandelbrot, a quien le gusta ser considerado matemático experimentalista, volvió a interesarse por estos trabajos, justo cuando trabajaba en la aplicación de las matemáticas a la representación gráfica por ordenador. De hecho, sólo cuando fue posible representar de forma fidedigna estos conjuntos, es cuando se mostraron fuente de las más bellas estructuras fractales que hoy conocemos. En palabras del propio Mandelbrot, es como si el trabajo de Julia, en cuanto a la geometría fractal se refiere, fuese la Bella Durmiente, que permaneció así durante años a la espera de que un apuesto ordenador la despertara.

Tomemos las transformaciones del plano F_c antes definidas, partamos de un punto del plano muy particular, el origen $p_0=(0,0)$, y comencemos el proceso iterativo: $p_1=F_c(p_0)$, $p_2=F_c(p_1)$, $p_3=F_c(p_2)$, ... Como quiera que estas transformaciones no son contractivas, para distintos valores de c este proceso iterativo puede tener también

distintos resultados. Pues bien, se define el *conjunto de Mandelbrot* M como la colección de aquellos puntos c para los que la sucesión p_0, p_1, p_2, \dots es acotada. Les presento a M :

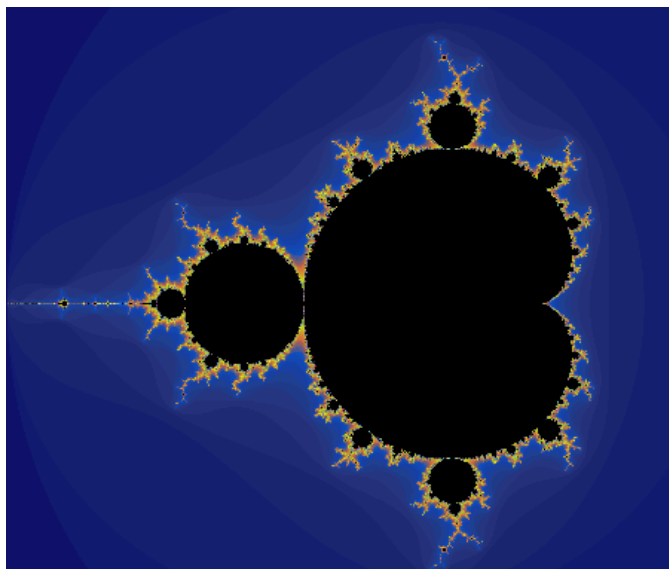


Figura 13.

A primera vista, el conjunto de Mandelbrot, también de negro en la figura 13, es en efecto intrincado y a la vez con ciertas propiedades de simetría y autosimilitud. Pero es cuanto más nos acercamos a él, cuando percibimos sus enrevesadas formas y sorprendente comportamiento. En la figura 14 mostramos sucesivas ampliaciones de pequeñas regiones de este conjunto que, como es obvio, nunca podrían haberse logrado sin la ayuda del ordenador.

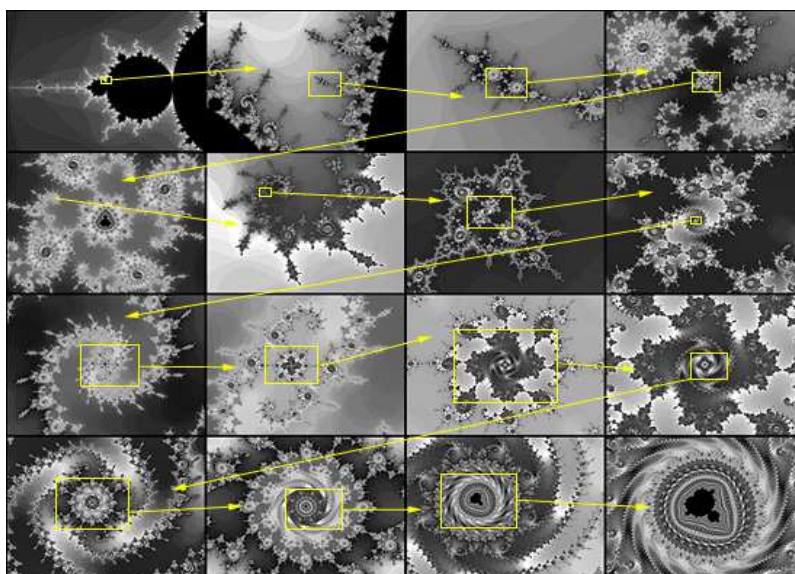


Figura 14.

A pesar de lo espectacularmente complicado y enrevesado que se muestra este conjunto, más cuanto mayor sea nuestro poder de cálculo y representabilidad, no es menos cierto que satisface de forma sorprendente ciertas y sencillas propiedades. Citemos un par de ejemplos.

Por una parte, ¿quién se atrevería a decir, a la vista de esta imagen, que el conjunto de Mandelbrot es conexo? ... Atrévase, sin miedo, atrévase.

Por otra, y esto engarza con nuestra idea original de fractal, el conjunto de Mandelbrot está conformado por trozos que no son más que fractales acordes con nuestra definición inicial, esto es, imágenes invariantes de sistemas de funciones iteradas.

Es en este punto, una vez conocidos los cimientos matemáticos sobre los que se asienta la geometría fractal, cuando doy por terminado este texto. Justo en el momento en que se abren las puertas a numerosas aplicaciones de la geometría fractal, no ya en el ámbito puramente científico, también en el arte, el diseño o la música. Por último, es posible que en esta introducción haya podido pasar de largo hechos fractales que algún lector eche de menos o considere de importancia. La brevedad es quizás la causa de tal fractalidad, perdón, fatalidad, que espero perdonen.

BIBLIOGRAFÍA

BARNESLEY M. *Fractals Everywhere*. Academic Press, 1988.

FEDER J. *Fractals*. Plenum Press, 1988.

JURGENS H, PEITGEN H Y SAUPE D. *Fractals for the Classroom*. Springer, 1992.

MANDELBROT B. *The Fractal Geometry of Nature*. W.H. Freeman and Co, 1982.