sctm06
sociedad, ciencia, tecnología y matemáticas 2006

Arte fractal*

José Martínez Aroza
Universidad de Granada

ADVERTENCIA

Este texto corresponde a la conferencia del mismo título que he impartido en varias ocasiones ante distintos públicos. Su concordancia con la charla misma viene gravemente condicionada y limitada por dos causas. En primer lugar, las características del medio. Durante la conferencia me apoyo en un abundante despliegue visual que, en mi opinión, la hacen mucho más atractiva que la mera lectura de un texto, el cual viene acompañado solamente de algunas de las imágenes que muestro en vivo, y no puede ofrecer vídeos con imágenes en movimiento. Y en segundo lugar, porque en aquella hay una parte esencial en la que el público participa en la elaboración de una obra colectiva de arte fractal.

Con el fin de atenuar en lo posible el primero de los defectos mencionados he publicado en mis páginas web personales un poco del material visual complementario, con el que el lector podrá ayudarse (se lo recomiendo vivamente) y disfrutar más de la lectura. El material publicado en mi página http://www.ugr.es/local/jmaroza incluye también algunos vídeos, pero he de advertir que su descarga puede ser lenta, ya que son archivos muy grandes (dos de ellos rondan los 200 Mb).

En lo referente a la segunda carencia (la confección de una obra fractal por el público), me temo que no puedo hacer nada salvo indicar que un buen programa para hacer fractales se puede descargar del sitio web http://www.ultrafractal.com, y es tan fácil de usar que se disfruta desde el primer momento.

En apariencia, el objetivo que persigue esta exposición no es más que el de entretener, hacer pasar un buen rato al oyente o al lector; pero hay un propósito oculto que puede pasar inadvertido a lo largo del texto, y es el de mostrar que hay formas de usar las matemáticas para cosas no convencionales, distintas de las usuales, y el de suscitar interés por ellas a través de uno de sus aspectos relativamente más atractivos, recientes y poco difundidos.

* Una versión de este artículo ha sido publicada, fraccionada en dos partes, en la sección de Cultura de los números de diciembre de 2005 y febrero de 2006 de la revista *Matematicalia* [http://www.matematicalia.net].

ARTE Y MATEMÁTICAS

El título preliminar que esta charla tuvo era «Arte Matemático», el cual también habría servido. Pero al final, «Arte Fractal» me pareció más concreto, más específico.

El Arte y las Matemáticas son dos materias en apariencia contrapuestas, enfrentadas, de naturalezas incompatibles. «Arte» significa sensibilidad, sentimiento, emoción, afectividad, excitación, todo lo ligado al corazón. «Matemática» es una palabra que suena a frialdad, precisión, abstracción, rigor, es decir, cosas ligadas a la mente racional y al pensamiento analítico. Parece difícil conciliar ambas disciplinas, encontrar una zona común en donde ambas interactúen, un terreno en donde justamente se usen las matemáticas para producir obras de arte.

Pues bien, esa región existe. Es más, esa región es un territorio salvaje y fértil, prácticamente inexplorado, y las imágenes fractales están en algunos de sus rincones más bellos.

> El Arte no es más que la imitación de la Naturaleza.
> Lucio Anneo SÉNECA

Me gustaría comenzar la exposición citando a uno de los más grandes pensadores y filósofos españoles, andaluz, cordobés por más señas, quien hace 2000 años ya tenía una idea clara de lo que es el arte. Yo diría que en la actualidad esa afirmación de Séneca no está tan clara como entonces, pero tampoco es malo que el concepto de lo que es y lo que no es arte esté bajo discusión.

También creo que es mi obligación precisar algunos detalles. En primer lugar, no entiendo mucho de arte, no más que cualquier ciudadano de cultura media: distingo el gótico del románico en arquitectura, el cubismo del surrealismo en pintura, y soy capaz de diferenciar bien entre la música de Alejandro Sanz y la de Johann Sebastian Bach, pero poco más. En segundo lugar, sí que entiendo algo de matemáticas, naturalmente, es mi profesión, sería un incompetente si no fuese así; pero tanto mi especialidad docente como mi investigación van por caminos ligeramente distintos al tema de esta charla. De hecho, hace tan sólo unos meses mis conocimientos sobre fractales eran más bien superficiales, aunque en la actualidad creo que podría decirse que alcanzo el nivel de un aficionado entusiasta.

LA FRONTERA ENTRE EL ARTE Y LAS MATEMÁTICAS

Las obras que aparecen en las figuras 1 a 12 proceden de la exposición internacional de imágenes fractales titulada «La Frontera entre el Arte y las Matemáticas», que se exhibió en Granada en julio de 2000, primero en la Facultad de Ciencias y después en el Palacio de Exposiciones y Congresos, con motivo de la Conferencia Euro-Árabe de Matemáticas «*Alhambra-2000*». Todas ellas son obras de prestigiosos y expertos artistas.

Figura 1. *El Arrecife de Coral*, de Linda Allison.

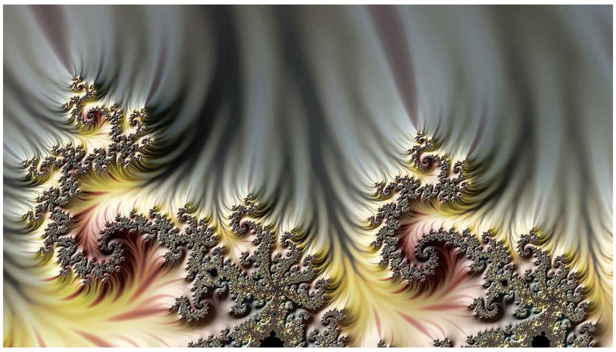

Figura 2. *Volcano*,
de Javier Barrallo.

Figura 3. *Ángeles en Verde*,
de Linda Allison.

Los cuadros de esta exposición fueron generados por ordenador y pasados a soporte de gran formato en papel fotográfico por el profesor Javier Barrallo, de la Universidad del País Vasco, a quien debemos la gentileza de darme el permiso para reproducirlas aquí, y de suministrarme parte del material que se muestra.

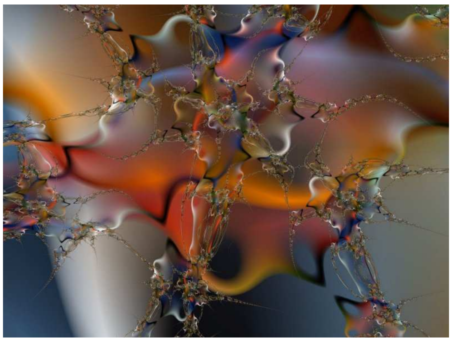

Figura 4. *Sangre Alienígena*,
de Earl Hinrichs.

Figura 5. *Bilbao*,
de Javier Barrallo.

UNA FÓRMULA

Cada una de estas obras es la expresión plástica de una fórmula matemática. Sí, **una** fórmula matemática. Con el tratamiento adecuado de color, y escogiendo ciertas transformaciones sencillas, una sola fórmula matemática puede dar lugar, en un ordenador, a esta explosión de formas y colores. Nada de lo que aparece en ellas tiene la más mínima pincelada ni retoque manual en el sentido pictórico tradicional. Quiero decir que todo esto se ha hecho manejando un teclado y un ratón, y que los autores han experimentado con fórmulas y con números hasta obtener el efecto deseado, pero en ningún momento han tocado directamente sobre la imagen. Así que cada imagen es, en su totalidad, el resultado de una fórmula. Perdonen que insista. No es que el fondo se haga con una fórmula y los objetos en primer plano con otra, o algo así. No. Todo, absolutamente todo lo que aparece en cada imagen, ha surgido de una sola ecuación. Hasta el punto de que si al autor no le gusta una parte del cuadro y quiere cambiarla, entonces debe escoger entre dejarlo como está o cambiarlo todo, modificando su fórmula.

Viendo estas obras uno tiende a pensar que sus autores son unos señores muy sesudos que se han estrujado la mollera hasta el agotamiento para dar a luz mágicas y, de seguro, complicadísimas fórmulas matemáticas, capaces de generar esta belleza, y que esto sólo está al alcance de mentes muy entrenadas y privilegiadas.

Nada más lejano de la verdad. Para hacer cosas como estas no hace falta saber muchas matemáticas; con las del Bachillerato basta. Tampoco hay que pasar horas y días interminables frente al ordenador para obtenerlas. Y tampoco el proceso de diseño de una de estas obras es tedioso y aburrido, muy al contrario. Para convencerse de ello basta instalar en un ordenador un programa de los muchos que hay para generar fractales, y probar al azar. Claro que, para obtener algo de aspecto medianamente artístico, es aconsejable conocer un poco los principios básicos que les dan su existencia.

Sin embargo, es importante resaltar que el hecho de que sea fácil obtener así una imagen bonita o artística, no resta ni una pizca de mérito a los artistas que han logrado estas obras. Ellos las han trabajado durante cientos de horas hasta obtener un resultado que reflejase sus gustos, sentimientos, o concepciones de la manera más fiel, y eso les eleva a la categoría de artistas con todo merecimiento.

LA PROPIEDAD
DE LAS OBRAS FRACTALES

Y son propietarios de su obra como cualquier otro artista. Porque se comprenderá fácilmente que una obra de arte debe estar protegida por las leyes de la propiedad intelectual, que regula su reproducción entre otras cosas. Sin embargo, en el caso de obras como estas, generadas por computadora, se producen unas muy curiosas condiciones no muy bien cubiertas jurídicamente.

Figura 6. *Ojos de los Vigilantes*,
de Domenick Annuzzi.

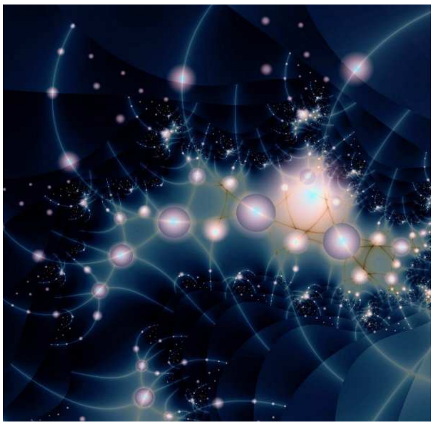

Figura 7. *Génesis*,
de Iñigo Quílez.

Figura 8. *Taupenski*,
de Janet Preslar.

Figura 9. *La Conjunción Misteriosa*,
de Mark Townsend.

Me explico. En primer lugar, no existe un original. Tanto las imágenes aquí reproducidas como las láminas que fueron expuestas en Granada y en otras ciudades, no son más que expresiones visibles de las fórmulas matemáticas que las generan, y que constituyen la auténtica propiedad de su autor. Podrían, si el autor quisiera, fabricarse mil copias de cada imagen sin más que darle al botón, y todas ellas serían idénticas entre sí, sin que nadie pueda decir que una de ellas sea la auténtica y las demás imitaciones.

Esta situación ha llegado hasta el punto de dar lugar a un suceso bastante chocante. Una organización sudamericana, interesada en exponer estos cuadros en Argentina, solicitó al profesor Barrallo, depositario de la colección, que se los enviara para que permaneciesen en aquel país durante un tiempo, transcurrido el cual serían devueltos a su origen. Barrallo no puso inconveniente, pero los costes de transporte transcontinental de objetos tan frágiles eran prohibitivos. ¿Qué hacer? Se adoptó la revolucionaria solución consistente en enviar por Internet los ficheros de las imágenes para su impresión a gran formato «in situ», y se pactó la cláusula de que, al término de la exhibición, serían destruidos tanto los archivos como los cuadros físicos. Esto resultó enormemente más barato que el transporte tradicional.

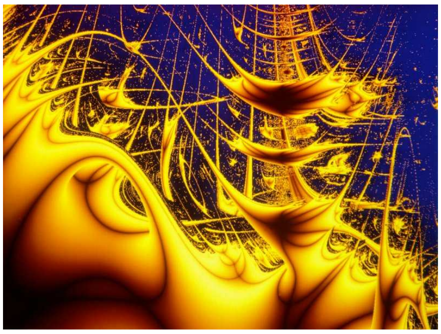

Figura 10. *Max-Plank Institut, Dortmund*, de Mario Markus.

Figura 11. *Avalanche*, de Sylvie Gallet.

Figura 12. *El Bosque Encantado*, de Javier Barrallo.

EL TEOREMA FUNDAMENTAL

Así que comenzaré por enunciar y demostrar el Teorema Fundamental del Arte Matemático, que dice así:

Teorema Fundamental del Arte Matemático:
«Con las Matemáticas de Bachillerato es posible hacer obras de arte».

Y como matemático que soy, me veo en la obligación de demostrar rigurosamente todo cuanto afirmo. Para ello me voy a remontar a tiempos muy recientes, a los años 70, justo en el desarrollo de la primera generación de computadoras.

Un ingeniero polaco, de nombre Benoît Mandelbrot, trabajaba en la École Politechnique de París sobre teorías matemáticas relacionadas con la complejidad y el caos de los fenómenos naturales.

La geometría clásica, creada hace más de 2000 años, está basada en formas como esferas, cilindros, conos, parábolas, elipses, todas ellas simples, bien conocidas. Son formas útiles en la arquitectura humana, pero no tanto en la Naturaleza (figura 13). Nuestro entorno no está hecho en su mayor parte de esferas y cuadrados (naturalmente me refiero a nuestro entorno natural, no al artificial creado por el hombre).

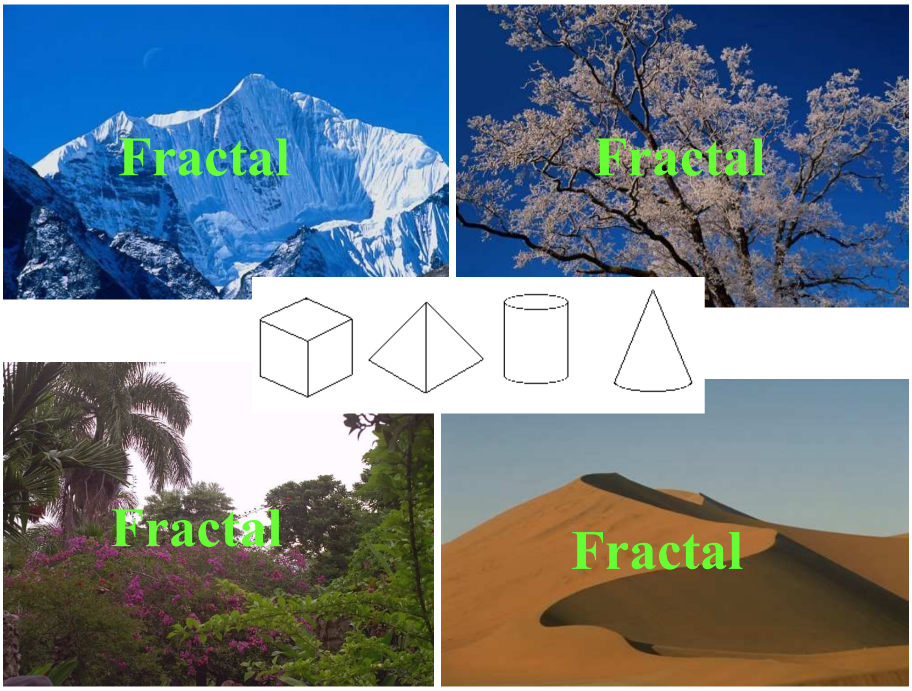

Figura 13. Geometría clásica y Naturaleza.

En palabras del propio Mandelbrot, *«las nubes no son esferas, las montañas no son conos, las costas no son circulares y las cortezas no son lisas, ni tampoco el rayo va en línea recta»*.

En 1975 Mandelbrot inventó la palabra «fractal» para designar la estructura que siguen ciertas formas naturales. «Fractal» viene del latín «fractus», que significa «fragmentado» o «roto», y también «irregular”. Es la palabra perfecta. Veamos algunos ejemplos de fractales naturales.

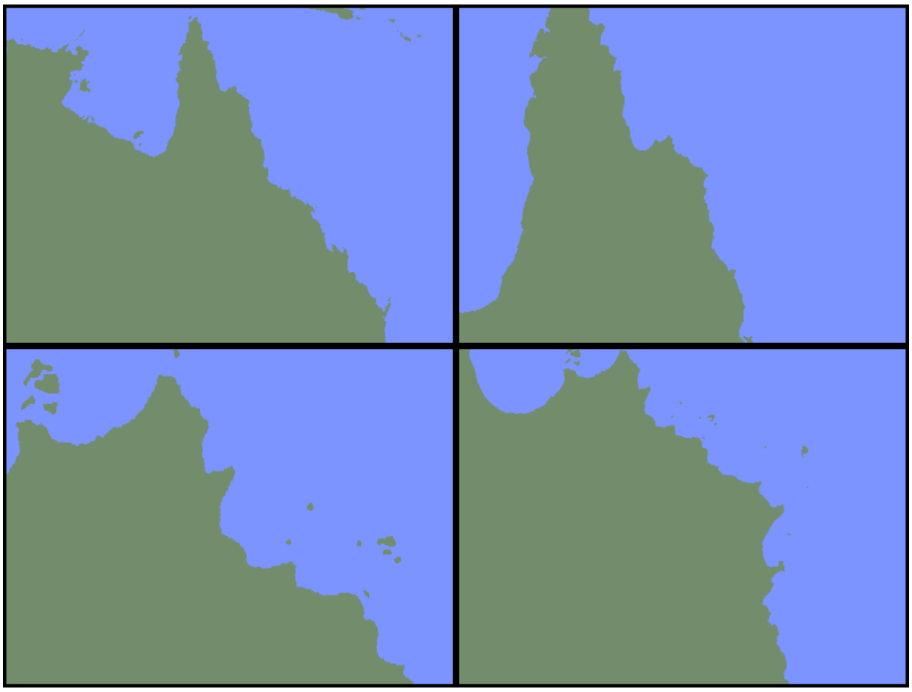

Figura 14. Línea de costa.

AUTOSEMEJANZA

Fijémonos en los cuatro dibujos de la figura 14. Los he sacado de un atlas y, para no dar pistas, he pintado toda la tierra de verde y todo el mar de azul. Así, no podemos ver montañas, cordilleras, ríos, poblaciones, ni nada que nos pueda ayudar a saber cuál es la escala. Sólo hay una línea irregular que separa la tierra verde del mar azul. La pregunta es: ¿se puede decir algo de la escala de estas imágenes? ¿Cuántos kilómetros abarca una de ellas?

A simple vista no parece haber diferencias entre ellas. Simplemente parecen haber sido tomadas del mismo mapa, en lugares diferentes, pero con la misma escala. ¿Verdad?

Pues no. En la figura 15 se puede comprobar algo que en un principio no era tan evidente. Son ampliaciones sucesivas, esto es, se trata de cuatro vistas del mismo lugar, concretamente en la costa norte de Australia, pero con cuatro aumentos distintos. Pero lo más interesante es que la línea de costa presenta la misma estructura en una vista de satélite que en una de avión. Veamos otro ejemplo en la Naturaleza.

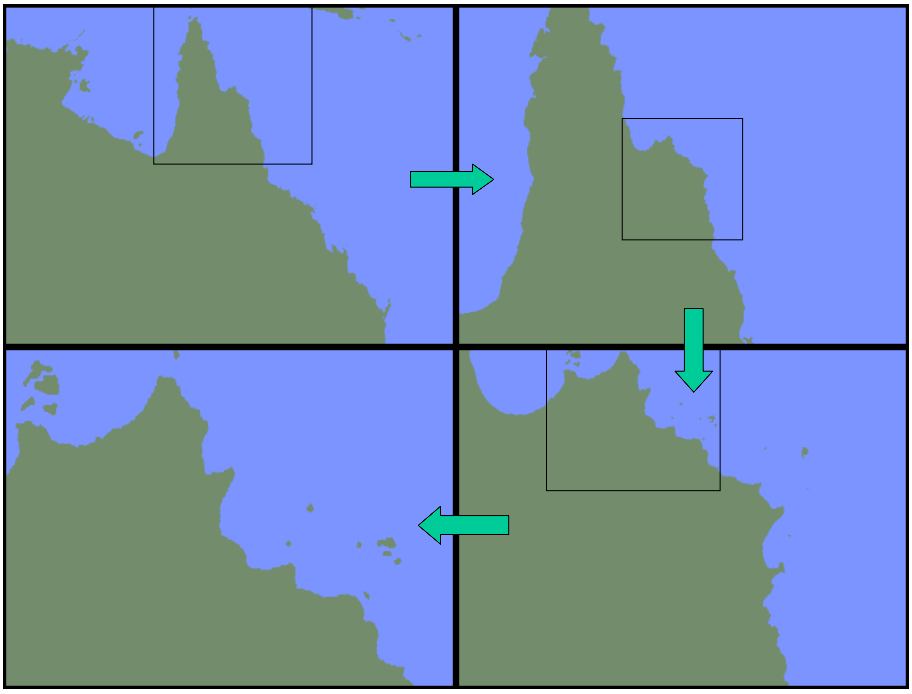

Figura 15. Cuatro ampliaciones del mismo lugar.

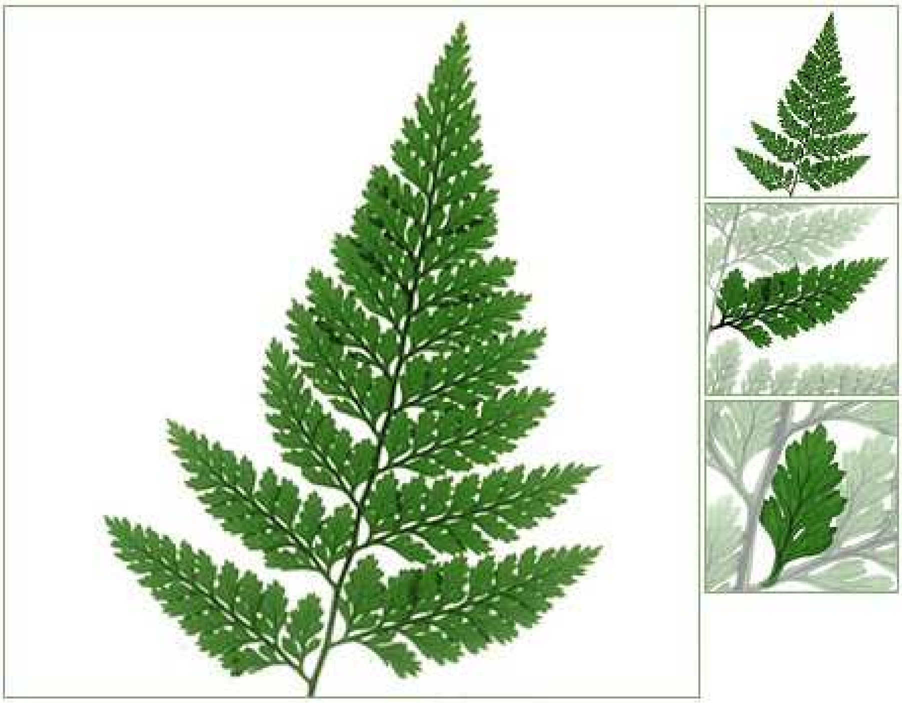

Figura 16. Autosemejanza en una rama de helecho.

Esta hoja de helecho (figura 16), una escolopendra, tiene una bella estructura, que se parece mucho a la de cualquiera de sus fragmentos, y ésta a su vez a la de los fragmentos menores. Esto se llama AUTOSEMEJANZA, es decir, parecerse a sí mismo. La figura 17 muestra más ejemplos de autosemejanza en la Naturaleza.

Una nube es un espectáculo natural, cotidiano y maravilloso. Todos hemos pasado alguna vez un rato observando su forma y su movimiento. Les buscamos parecido con elefantes, pájaros y naves extraterrestres. Las nubes tienen la misma apariencia vistas desde lejos que desde la ventanilla de un avión. Un pedazo de nube se parece una nube completa. ¿A qué distancia se encuentra ese mechón de nube? Sin una referencia conocida, como por ejemplo un pájaro o un avión que pase por allí, no se puede saber. La forma del mechón de nube no dice nada sobre su tamaño.

Las pequeñas ramitas de un árbol suelen tener el mismo trazado que las ramas principales, y éstas que el mismo tronco. Hay árboles en que esta autosemejanza llega a alcanzar hasta siete niveles, desde el tronco hasta las ramitas más pequeñas. Algo muy semejante ocurre en los cristales de hielo, en los sistemas fluviales con sus grandes ríos, sus afluentes y sus pequeños arroyos y torrentes.

También ocurre esto en las ramificaciones del sistema vascular humano, con sus grandes venas y arterias, y sus minúsculos capilares. En los bronquios sucede algo parecido. Un trozo de roca se parece bastante a la montaña de la que ha sido extraído. Recientemente los astrónomos han descubierto que la distribución de estrellas en enjambres, dentro de las galaxias, de las galaxias a su vez en grupos de galaxias, etc., indica que nuestro universo sigue un modelo fractal. Los fractales se asemejan también al ruido de la radio cuando no sintoniza ninguna estación, a la distribución de vehículos en una autopista con tráfico denso, a la variación de las crecidas del río Nilo durante miles de años, a las fluctuaciones de la bolsa... al paseo de un borracho.

Figura 17. Más fractales naturales.

Este trozo de brécol ¿es suficiente para la cena de toda la familia, o es un pedacito como la punta de mi meñique? Todos estos son ejemplos de estructuras que se parecen a sí mismas al cambiar de escala, es decir, que al hacer una ampliación o reducción de la escena lo que se ve es muy similar a lo que ya había. La geometría fractal es realmente la propia geometría de la Naturaleza.

AUTOSEMEJANZA EN MATEMÁTICAS

En matemáticas, el concepto de autosemejanza no es nuevo. En 1904 el matemático sueco Helge von Koch dio a conocer una curva conocida como *curva de Koch* o «copo de nieve». Se construye a partir de un triángulo sólido (figura 18), adjuntando en cada uno de sus tres lados un triangulito de tamaño tres veces inferior. Después, en cada uno de los doce lados resultantes se adhiere un nuevo triangulito tres veces inferior, y el proceso continúa así indefinidamente.

El resultado final, como límite de este proceso infinito, tiene el aspecto de un cristal de hielo, mal llamado copo de nieve.

Observemos la forma inferior. Es un fragmento de un copo de nieve. ¿Qué tamaño tiene este copo de nieve? Puede que lo que estemos viendo sean tres de los seis lóbulos principales, con lo cual la imagen mostraría más o menos la mitad del copo. Pero también puede ser que lo que vemos sean sólo las rugosidades del lóbulo superior, quedando debajo los otros cinco, y el copo sería algo mayor que la hoja de papel. O también puede que estemos ante la punta del iceberg, y que el copo que está debajo en realidad sea gigantesco, tan grande como la propia Tierra. No hay modo de saberlo.

Por extraño que parezca, la longitud entre dos puntos cualesquiera del borde del copo es siempre infinita. Por muy cercanos que parezcan dos puntos de esta orilla, nadie puede pretender recorrerla de uno al otro.

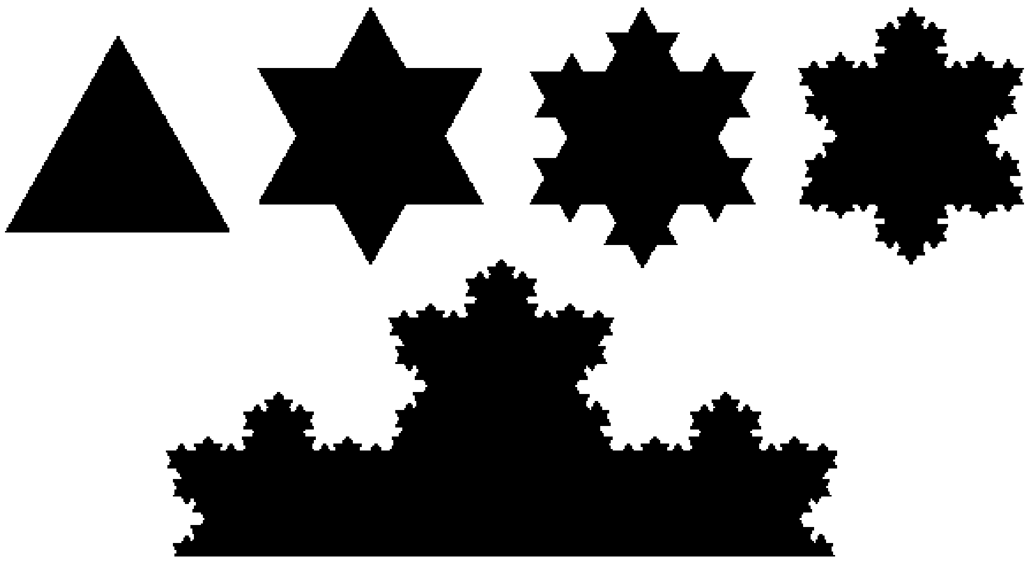

Figura 18. El Copo de Nieve de Koch.

MONSTRUOS MATEMÁTICOS

Los matemáticos de aquella época, extrañados, etiquetaron ésta y otras figuras como «monstruos matemáticos». Otro monstruo es el *Triángulo de Sierpinski*, que se obtiene a partir de un triángulo inicialmente sólido, retirándole de su parte central un triángulo semejante, más pequeño, invertido, y repitiendo el proceso con los tres triángulos, también semejantes, que quedan. El resultado final de este proceso infinito es el que vemos en la figura 19.

Los matemáticos han encontrado que el área del triángulo de Sierpinski es cero. Sí, sí, cero. Sea trata de una figura cuya superficie es nula. Es como si fuese una colcha de tela de araña o de tul muy tenue, hecha de un hilo tan fino, tan fino, que no llega a cubrir absolutamente nada. Podría ser un bonito velo fractal para una novia fractal en su boda fractal, pero está claro que su utilidad como manta para el invierno queda descartada.

Otro monstruo es la *Alfombra de Sierpinski* (figura 20), que es el equivalente del anterior, pero con cuadrados. Al igual que el triángulo, tiene un área de cero unidades. Por tanto, esta alfombra tiene la ventaja de que no hace falta levantarla para barrer por debajo, porque como no tapa nada... Así que el que consiga fabricar alfombras de Sierpinski, puede tener el negocio asegurado.

Otro monstruo, pero en tres dimensiones, es la *Esponja de Menger* (figura 21), que se obtiene a partir de un cubo macizo, subdividiéndolo en 27 cubitos iguales más pequeños y retirando el cubito central interior y los centros de cada una de las seis caras, en total siete cubitos. Después de esto quedan 20 cubitos, a los cuales se les repite individualmente este proceso, y así indefinidamente. En la figura vemos las tres primeras fases de la construcción de la esponja de Menger.

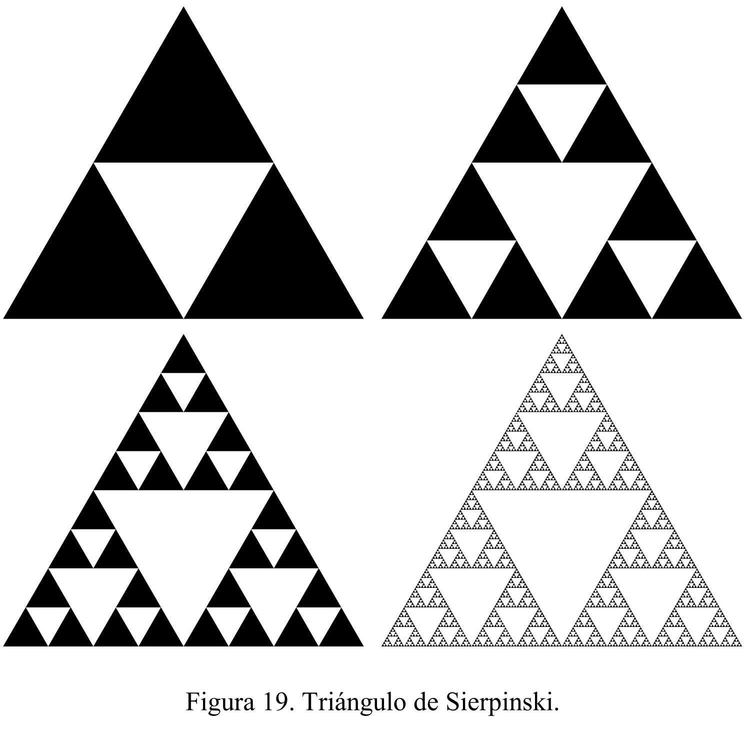

Figura 19. Triángulo de Sierpinski.

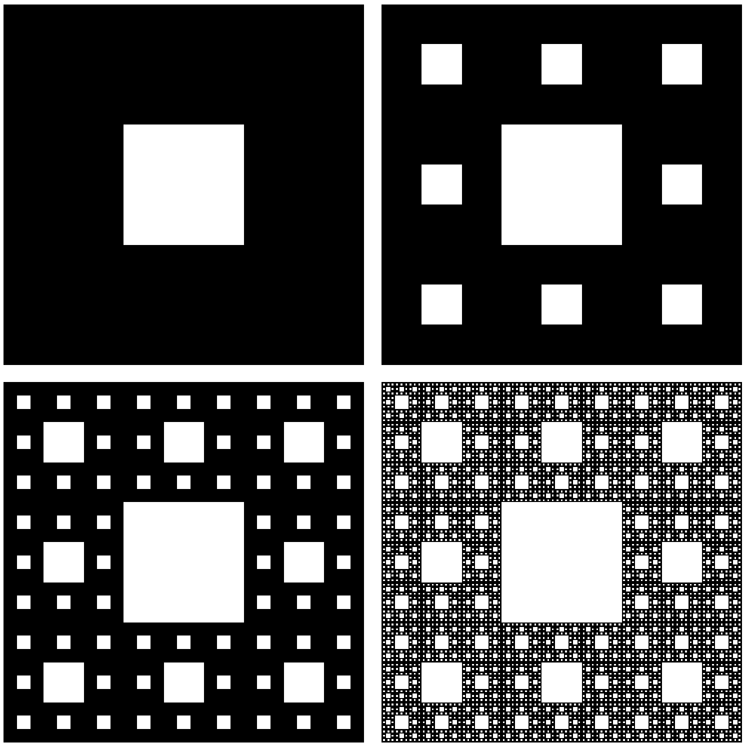

Figura 20. Alfombra de Sierpinski.

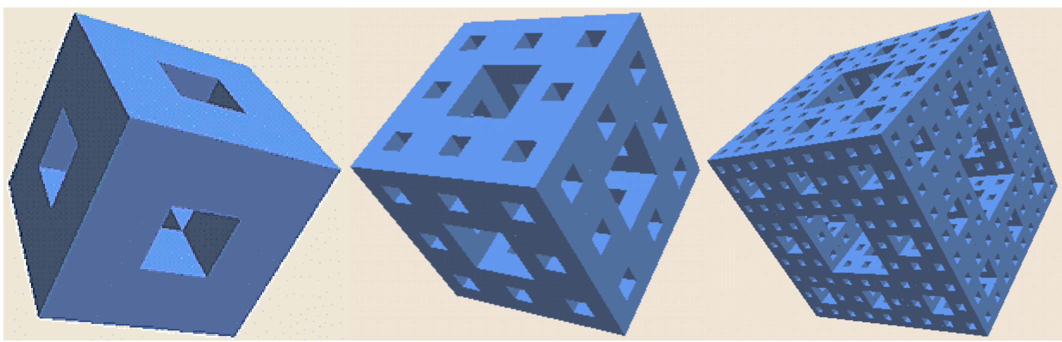

Figura 21. Esponja de Menger.

Para ver mucho más claro qué forma tiene la porción que se retira del cubo en la primera fase, permítanme recurrir a un artista universal, el español Salvador Dalí. La figura 22 muestra su obra titulada *Corpus Hipercubicus*, que se suele citar como ejemplo visible del desarrollo tridimensional de un hipercubo de cuatro dimensiones, pero a mí me sirve aquí para ilustrar la parte retirada del cubo. Bueno, con la salvedad del cubito inferior, donde Jesucristo tiene sus pies apoyados.

Hagamos una breve visita turística a la esponja de Menger (figura 23).

Pues resulta que la esponja de Menger tiene un volumen de cero unidades. ¿Se imaginan una esponja que no ocupe absolutamente ningún volumen? Debe de ser capaz de empapar un montón de líquido, así que sus posibilidades comerciales como artículo de limpieza y de aseo son fantásticas. Además, su transporte sería baratísimo, primero, porque no pesa nada, y segundo porque, si las comprimimos, podemos empaquetar mil trillones de esponjas en una caja de cerillas... y la caja seguiría estando igual de vacía.

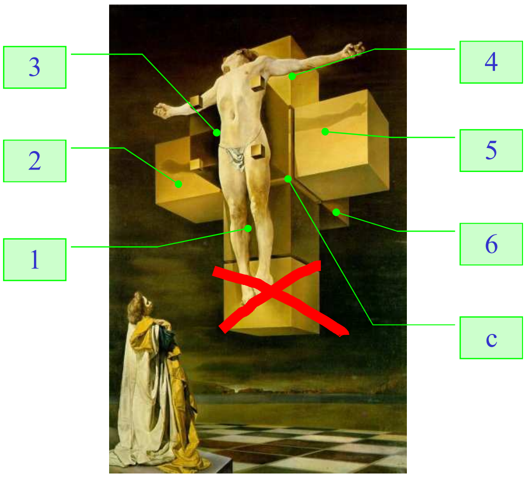

Figura 22. *Corpus Hipercubicus*, de Salvador Dalí.

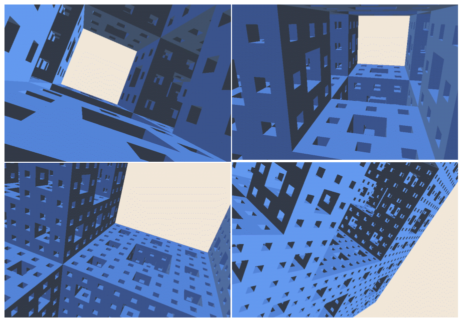

Figura 23. Diversas perspectivas de la esponja de Menger.

PROCESOS ITERATIVOS Y CAOS

Hemos hablado de autosemejanza, pero autosemejanza no significa necesariamente orden y armonía. Puede darse autosemejanza también en el desorden, en el caos. Hablemos un poco de caos.

Mandelbrot estaba trabajando en temas relacionados con el Análisis Numérico, una rama de la Matemática Aplicada (mi especialidad), concretamente con procesos iterativos.

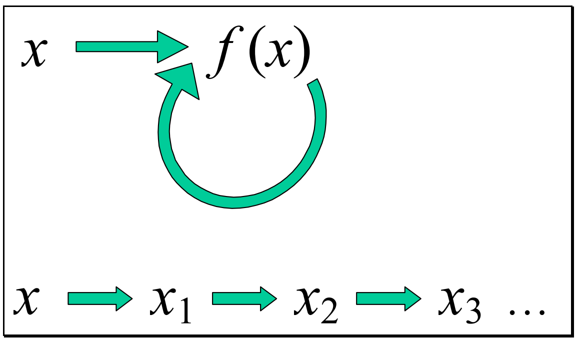

Figura 24. Ilustración de un proceso iterativo.

Un proceso iterativo (figura 24) es muy fácil de explicar, consta de una fórmula o función y un número inicial. El proceso consiste en aplicar la fórmula al número inicial para obtener como resultado otro número, que a su vez se reintroduce de nuevo en la fórmula para dar un nuevo resultado, y así sucesivamente.

Los matemáticos estudiamos el comportamiento de estas secuencias de números, y podemos averiguar si estos números tienden a parecerse entre sí conforme avanzamos en los cálculos, de forma que podamos hablar de un número especial llamado *límite*, al cual se van aproximando los resultados parciales, o si, por el contrario, los resultados sucesivos tienden a diferenciarse cada vez más, y se hacen enormes. La primera situación se conoce como *convergencia*, y la segunda como *divergencia* del proceso iterativo.

Fórmula	$\frac{1}{2}x+1$	$1-2x$
x	0	0
x_1	1	1
x_2	1.5	– 1
x_3	1.75	3
x_4	1.875	– 5
x_5	1.9375	11
	$\vdots$	$\vdots$
Límite	2	$\pm\infty$
	Convergente	Divergente

Figura 25. Dos procesos iterativos,
uno convergente y otro divergente.

En la columna central de la tabla de la figura 25 vemos un ejemplo muy sencillo de proceso iterativo, que cualquiera puede hacer con una simple calculadora. La fórmula consiste en «dividir por la mitad y añadir 1», y el número inicial es cero. Como resultado de aplicar repetidamente (iterativamente) la fórmula, se generan los números que quedan por debajo, en la misma columna. En el caso del ejemplo mostrado, parece bastante claro que la sucesión generada es convergente hacia un límite que es el número 2.

Como ejemplo de proceso divergente podemos ver el que aparece en la columna derecha. La formula es «1 menos el doble del número en curso», y los sucesivos términos muestran signos alternos y valores cada vez mayores, indicando con ello una clara tendencia a separarse entre sí y a mostrar divergencia.

De esta manera, parece que los procesos iterativos pueden clasificarse en convergentes o divergentes.

Pero los matemáticos han descubierto que determinadas ecuaciones, con las condiciones adecuadas, pueden producir números que no parecen seguir norma alguna. En la Naturaleza hay ejemplos de ello, como pueden ser los sistemas meteorológicos, en los que una minúscula alteración puede provocar un cambio radical. Esto se conoce como el *efecto mariposa*, y es lo que hace tan difícil el pronóstico del tiempo a medio plazo, sobre todo en condiciones de transición. Si pongo un lápiz en posición vertical, todos sabemos que se caerá en cuanto lo suelte. Pero ¿hacia qué lado? Eso depende de mi pulso, pero basta un pequeño temblor de mi mano o un leve soplo de aire para hacer que el lápiz caiga de otra forma completamente distinta. Eso es el efecto mariposa. Los investigadores médicos sospechan que algunas disfunciones cerebrales como la epilepsia no son más que una transición de la mente entre el comportamiento normal y el caótico, causada porque determinado parámetro químico ha sobrepasado una cierta medida, un umbral.

ECUACIÓN LOGÍSTICA

En matemáticas también hay procesos caóticos. Una de esas ecuaciones, asombrosamente sencilla, es la que vemos en la figura 26, conocida como *ecuación logística:* $y=4x(1-x)$. Se utiliza con frecuencia como modelo del crecimiento de una población cuyo tamaño está limitado por algún factor, como puede ser la cantidad de alimento o el territorio disponible.

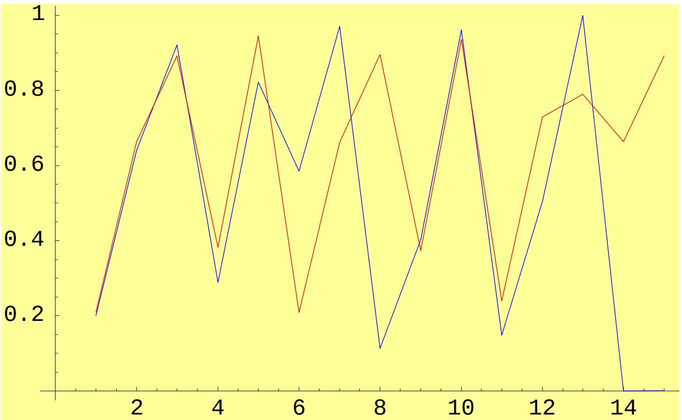

Figura 26. La ecuación logística como productora de caos.

En este experimento he aplicado la ecuación logística partiendo del número inicial 0.20, y los resultados sucesivos están pintados en la gráfica azul, de izquierda a derecha. Se aprecia de inmediato que estos números no parecen seguir ninguna regla, y saltan como locos de arriba abajo. Pero lo más grave del asunto es que, si tomo como punto de partida uno diferente, pero muy parecido, en nuestro caso el 0.21, entonces la serie, que aquí aparece en rojo, aunque al principio va muy semejante a la azul, pronto se separa y sigue su propio camino caótico independiente.

NÚMEROS COMPLEJOS

El señor Mandelbrot estaba estudiando el comportamiento de los procesos iterativos cuando se utilizan con números complejos.

¿Se acuerdan de los números complejos? ¿Aquello de la parte real y la parte imaginaria? ¿Verdad que sí? Había un número llamado «i» con la extraña propiedad de que su cuadrado, «i» al cuadrado, es igual a -1. Cosa portentosa, pues siempre se ha dicho que un número al cuadrado tiene que dar un resultado positivo. Como es sabido, los números complejos se representan geométricamente en un plano, en el que el eje de coordenadas horizontal es el eje real y contiene todos los números reales, y el eje vertical es el llamado eje imaginario, y contiene la unidad imaginaria y todos sus múltiplos. Todo número complejo corresponde a un punto del plano cuyas coordenadas son su parte real y su parte imaginaria.

Los números complejos aparecen por vez primera en el Renacimiento italiano. Los matemáticos de la época les atribuyeron propiedades místicas y les dieron adjetivos caprichosos como «real» e «imaginario», que perduran hoy.

El valiente que por primera vez puso sobre el papel una fórmula que incluía la raíz cuadrada de un número negativo fue el matemático italiano Jerónimo Cardano alrededor de 1550. Lo escribió con la reserva de que la cosa no tiene sentido, es ficticia e imaginaria, pero lo escribió. En aquella época había que tener mucho cuidado con lo que se decía o escribía. De hecho, Cardano fue poco después encarcelado y torturado. En realidad no fue sólo por eso, sino porque como también era astrólogo (como todos los matemáticos de entonces) se le ocurrió hacerle el horóscopo a Jesucristo y, claro, le condenaron por hereje. Pero la vida da muchas vueltas: a su muerte dejó toda su fortuna a la Iglesia Católica.

El propio Leibniz, creador junto con Isaac Newton del moderno Cálculo Infinitesimal, disparataba escribiendo: *«El Divino Creador ha encontrado ocasión de manifestar su sublime inteligencia en esta maravilla del análisis, este portento del mundo ideal, este anfibio entre el ser y el no-ser que llamamos raíz imaginaria de la unidad negativa».*

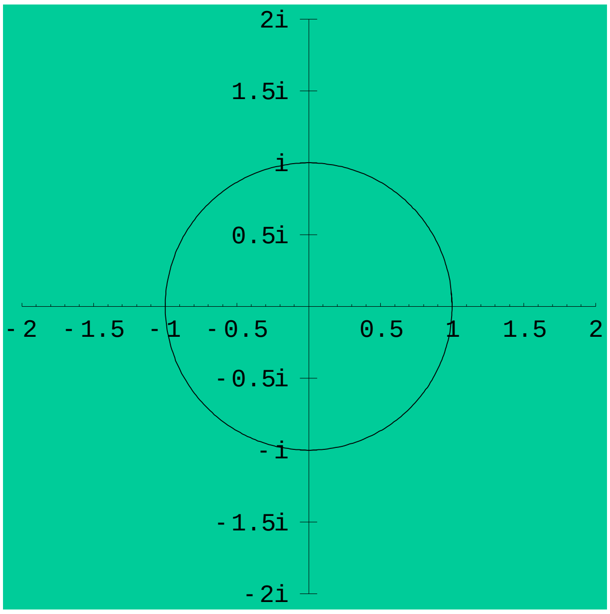

Figura 27. El plano complejo.

No fue sino hasta doscientos años después, en 1777, que Leonard Euler (pronúnciese OILER), matemático suizo, simbolizó la raíz cuadrada de -1 con la letra «*i*» (inicial de imaginario). Curiosamente, Euler también bautizó al número «*e*».

Ese mismo año, qué extraña coincidencia, nacía en Alemania Carl Friedrich Gauss, quien fue de hecho el primero en usar ampliamente los números complejos, en darles una interpretación geométrica, en expresarlos en su forma binómica (parte real y parte imaginaria) y formular todas sus leyes. En su tesis doctoral usó los números complejos para demostrar el *Teorema Fundamental del Álgebra*, uno de los más importantes pilares sobre los que se sustenta toda el álgebra. Gauss tenía 21 años de edad.

Volviendo a lo nuestro, Mandelbrot estudiaba la convergencia y la divergencia de procesos iterativos en el plano complejo, en particular el proceso $x^2 + c$, donde c es un determinado número fijo. Partiendo del cero como número inicial, la serie generada por este método puede ser convergente o divergente, y eso dependerá del número c.

PINTANDO PUNTOS

Mandelbrot encontró que para unos valores de c la serie era convergente, mientras que para otros era divergente. Entonces tuvo la idea (genial y crucial) de representar todos los posibles valores de c en el plano complejo, dándoles color. Por ejemplo, si para un valor particular de c la serie salía convergente, entonces pintaba el punto c de color negro.

En la primera gráfica de la figura 28 he pintado de color negro un valor de c para el cual la serie generada, en negro, es convergente. Sin embargo, para otro valor de c, que he pintado en azul, la serie generada es divergente.

Si hacemos esto con la ayuda de un ordenador para todos los posibles valores de c (figura 28) entonces iremos recubriendo todo el plano con puntitos negros y azules, y al final obtendremos una especie de mapa de color negro y azul.

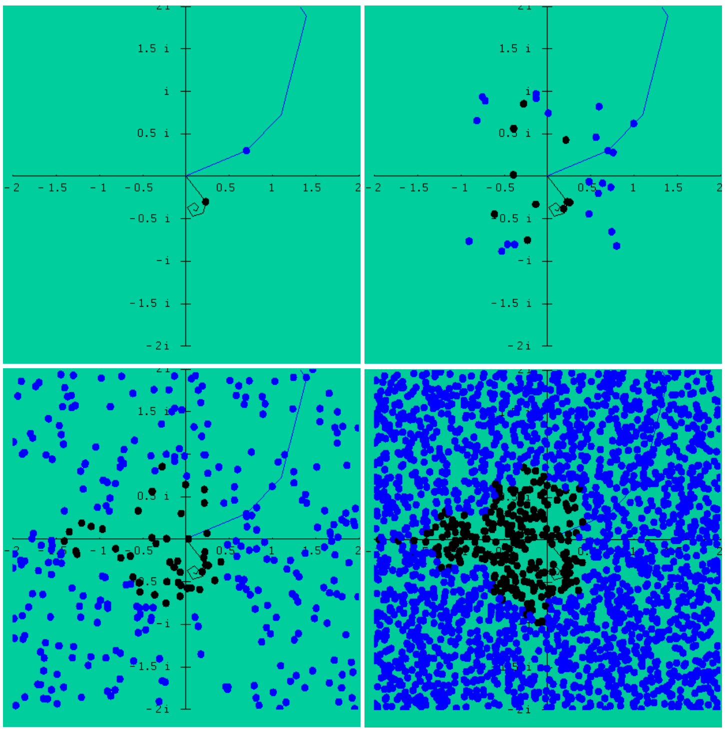

Figura 28. Cuatro fases en la generación del conjunto de Mandelbrot.

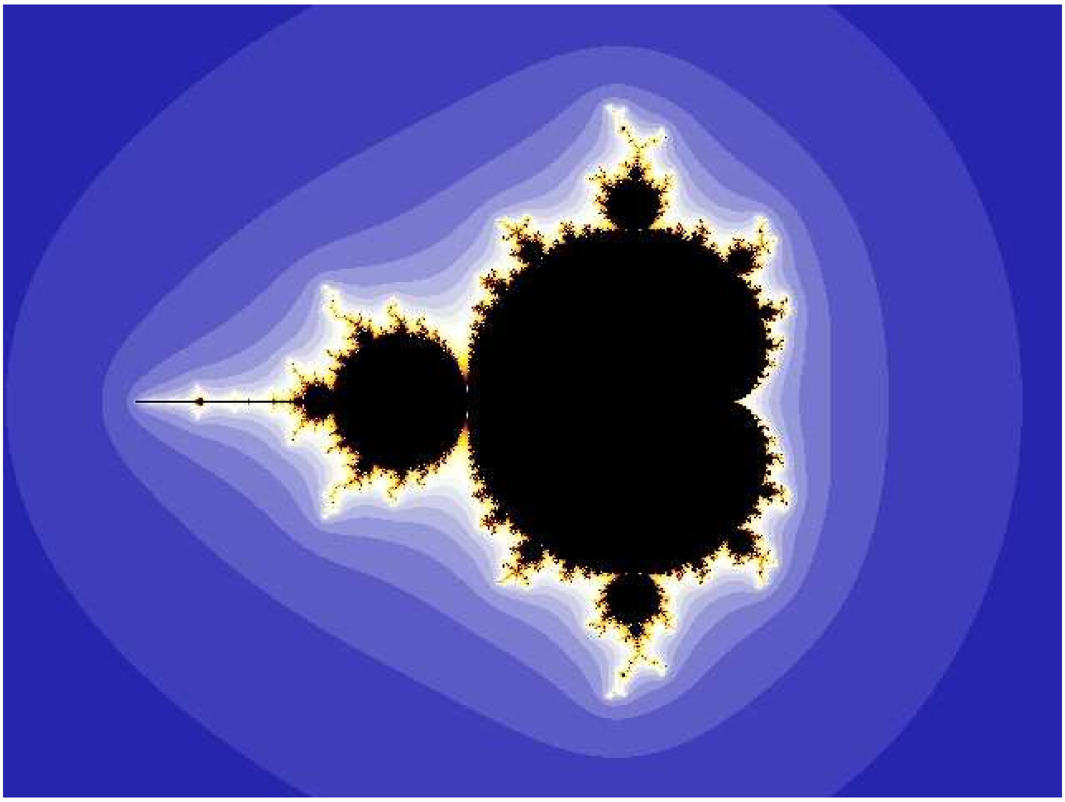

Figura 29. El conjunto de Mandelbrot.

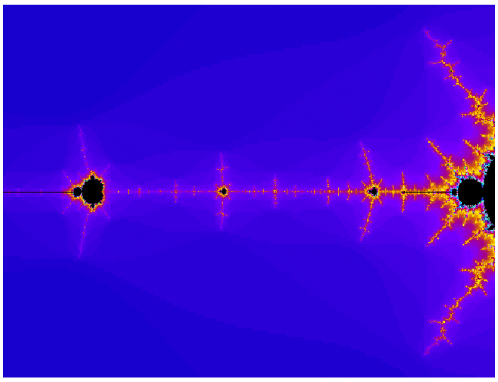

Figura 30. Tres réplicas del conjunto de Mandelbrot. La del centro es 2000 veces menor que el conjunto principal, que queda a la derecha de la imagen.

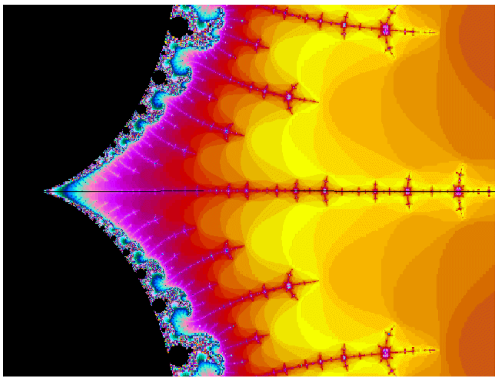

Figura 31. Detalle de la réplica que aparece en el centro de la figura 30. La ampliación es de 10000 aumentos.

EL CONJUNTO DE MANDELBROT

Este mapa (figura 29) se llama *conjunto de Mandelbrot*. Fue descubierto por Mandelbrot en 1980. En la figura que aquí vemos están representados en negro todos los valores posibles de c que provocan convergencia de la serie, y en otros colores los valores que causan divergencia, variando la tonalidad del color según la velocidad de divergencia, es decir, más azul cuanto más rápido diverge la serie, y pasando por azul celeste, blanco, amarillo y rojo cuanto más lentamente diverge.

Lo primero que llama la atención es su forma irregular. Parece una especie de muñeco de nieve tumbado, con verrugas y con pelos.

La parte más interesante de esta figura está en la frontera entre la zona de convergencia y la zona de divergencia. Parece muy caprichosa, llena de rizos. Puede parecer que si ampliamos un poco la escala de la imagen, es decir, si la miramos más de cerca, entonces la veremos más suave. Pero cuando Mandelbrot lo hizo para comprobarlo, se llevó una gran sorpresa.

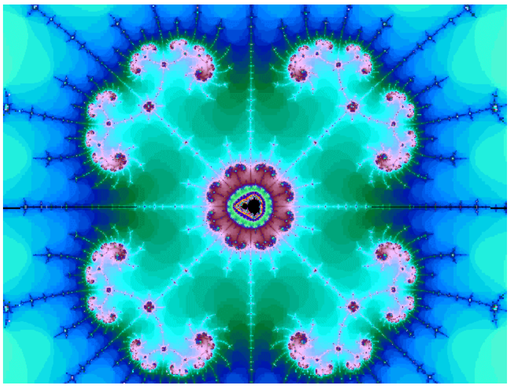

Figura 32. Una nueva réplica, que aparece aquí con 32 millones de aumentos.

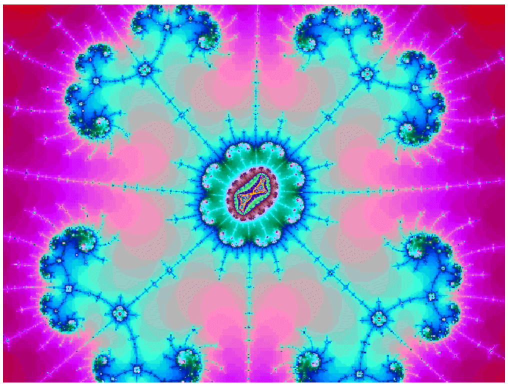

Figura 33. Huerto de coliflores encontrado a un billón de aumentos (10^{12}).

Figura 34. Una nueva réplica del conjunto de Mandelbrot, muy adornada. Estamos a un trillón (10^{18}) de aumentos de «profundidad».

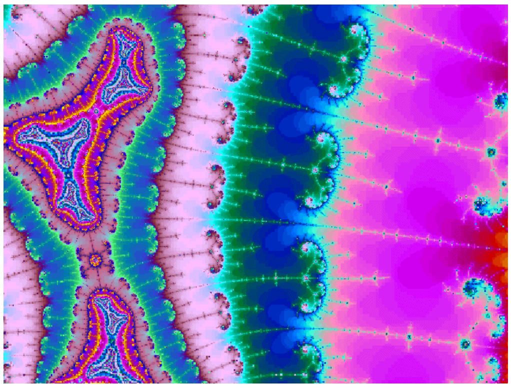

Figura 35. Campo de golf con bosque a orillas de un lago. Estamos a mil cuatrillones (10^{27}) de aumentos.

Las figuras 30 a 36 son instantáneas extraídas de un vídeo de 2 minutos 14 segundos de duración, consistente en 1 minuto 7 segundos de veloz y constante ampliación del conjunto de Mandelbrot, y otro tanto regresando al punto de partida.

El conjunto de Mandelbrot contiene multitud de copias de sí mismo (figuras 30, 32, 34). Recordemos que cada puntito en negro produce una serie convergente, que el azul significa divergencia rápida, el rojo divergencia lenta, y así. Es admirable lo complicada que es esa frontera, y lo realmente extraordinario es la cantidad infinita de formas bellas (figuras 33, 35), unas simétricas, otras no tanto, que surgen al navegar por esa frontera. Se trata de un auténtico fractal, autosemejante y caótico. Y para nuestros propósitos artísticos, es una fuente inagotable de bellas formas y colores.

El vídeo nos está llevando hacia un punto determinado del conjunto de Mandelbrot (en realidad no importa cuál), y mientras nos aproximamos vamos viendo y dejando atrás curiosas y raras formas. ¿Pueden ustedes hacerse una idea de la cantidad de cosas que debe haber en otras regiones vecinas, y que nadie ha visto? Porque nunca podrá visitarse este conjunto en su totalidad, ya que no se trata de un territorio convencional. En realidad es como si tuviera tres dimensiones, las dos del plano normal, y una tercera dimensión a la que se llega haciendo un *zoom*. Y esta tercera dimensión no tiene fin. Buscando, buscando, podemos encontrar árboles, ríos, lagos, montañas, nubes, y, sobre todo, coliflores, muchas coliflores (figuras 33, 36).

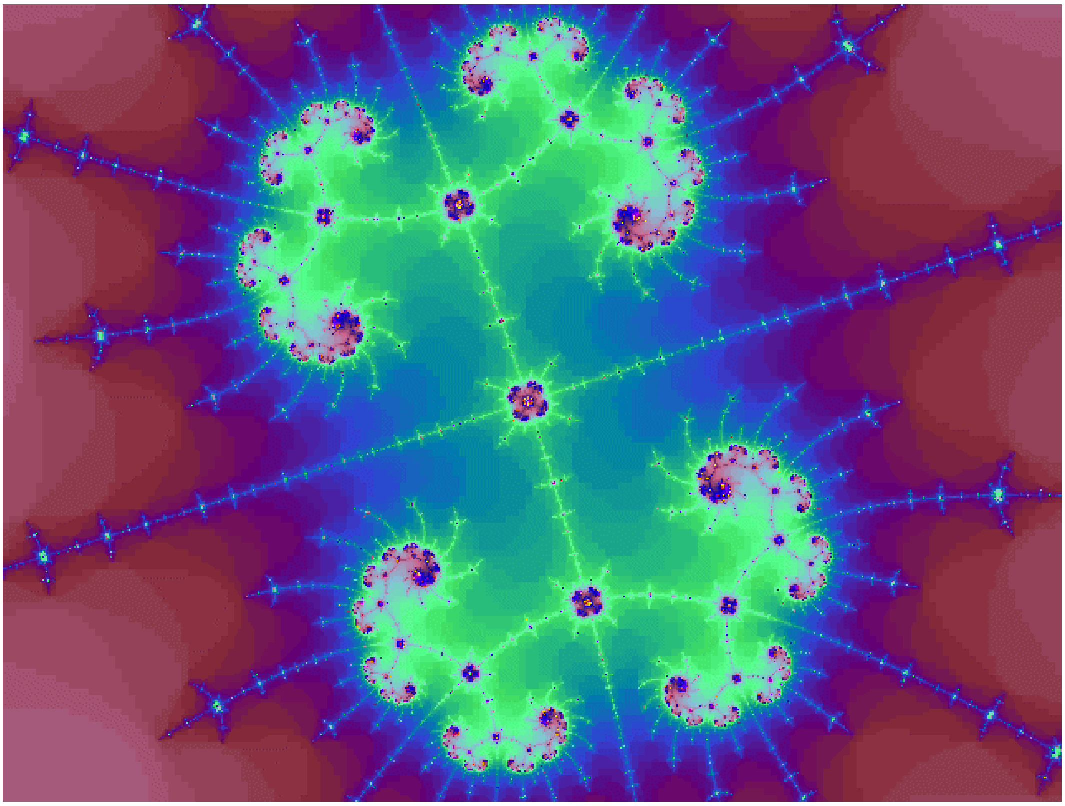

Figura 36. A cien quintillones (10^{32}) de aumentos, siguen apareciendo extraños seres, pero el ordenador empieza a chirriar y a crujir. No resiste la presión (numérica) y hay que regresar a la «superficie».

Ahora que ya conocemos un poco mejor el conjunto de Mandelbrot es muy instructivo volver a ver algunas de las obras de arte mostradas al principio.

En *Volcano* (figura 2) se pueden ver detalles que antes no hubiesen llamado la atención. Hay dos formas negras en la parte inferior que pertenecen ¡al conjunto de Mandelbrot!. Efectivamente, *Volcano* es $x^2 + c$, eso sí, con un fantástico disfraz de color. El grueso del conjunto queda por debajo del cuadro.

Taupensky (figura 8) es un maravilloso rizo de la frontera del conjunto de Mandelbrot. *Bilbao* (figura 5) es una vista lejana del conjunto; de hecho el conjunto completo puede verse abajo a la izquierda. *Taupenski* y *Bilbao* son $x^2 + c$. Otras obras también son conjuntos de Mandelbrot, y otras tienen fórmulas distintas, pero siempre tan sencillas como la de Mandelbrot. Y todas, sean o no Mandelbrots, son el plano complejo.

CREACIÓN DE UNA IMAGEN FRACTAL

El proceso de creación de una imagen fractal consta básicamente de dos partes: la elección de la fórmula y la elección del algoritmo de color. Hay muchas fórmulas posibles, pero la de Mandelbrot da mucho juego. El algoritmo de color se puede escoger diferente para las zonas de convergencia y de divergencia. Con estos elementos es ya suficiente para crear una imagen vistosa.

Para producir algo más elaborado se puede, además, realizar una transformación del plano complejo para cambiar el aspecto de las formas que aparecen. Las transformaciones básicas del plano son las traslaciones, los giros, y los estiramientos, pero hay muchas otras transformaciones con expresiones matemáticas sencillas que consiguen efectos muy espectaculares, como inversiones, remolinos, etc. Y finalmente, para conseguir un efecto en verdad de artista profesional, se pueden hacer varios fractales y superponerlos, uno encima de otro, de modo que cada fractal sea una capa. Así se pueden conseguir sombras, degradados, o texturas de riqueza inimaginable.

CONCLUSIÓN

Llegados a este punto del texto, tengo que interrumpirlo y darle fin. En mi conferencia este es el momento de hacer una imagen fractal con el público. Como tal cosa es imposible aquí, terminaré recomendando al lector que instale en su ordenador un programa para hacer fractales (el Ultra Fractal está especialmente orientado a la obtención de imágenes atractivas), y que experimente y disfrute.

Por último, diré que he orientado esta exposición sobre fractales hacia el aspecto más lúdico posible, el artístico, pero que hoy en día las ciencias están cambiando profundamente, y los científicos más prestigiosos, no sólo matemáticos y físicos, sino también médicos, biólogos e ingenieros han pasado de considerar seriamente la geometría fractal como un modelo más o menos fiel de la Naturaleza, a pronosticar con todo convencimiento que las ciencias del próximo siglo estarán fuertemente cimentadas sobre las teorías fractales, como la complejidad y el caos. Nos hemos estado divirtiendo (eso confío) con lo que mañana puede ser nuestra concepción natural del mundo, y, por qué no, quién sabe, una asignatura en el Bachillerato.

BIBLIOGRAFÍA

Cualquier libro de matemáticas que hable de números complejos.

IPANAQUÉ R, VELESMORO R. *Breve manual de Mathematica 5.1* [Disponible en http://www.eumed.net/libros/2005/ric2/index.htm].

MARTÍNEZ AROZA J. «Arte fractal I-II». *Matematicalia*, Cultura, 1 (4), 2005 – 2 (1), 2006 [Disponible en http://www.matematicalia.net].

OSVALDO A. «Fractales, más allá de 1D, 2D ó 3D». *Revista Digital Universitaria* 6 (12), 2005 [Disponible en http://www.revista.unam.mx/vol.6/num12/art119/int119.htm].

Apophysis, http://www.apophysis.org.

Fractalus, http://www.fractalus.com/ifl.

Fractint, http://spanky.triumf.ca/www/fractint/fractint.html.

Ultra Fractal, http://www.ultrafractal.com.